Tijdschrift van het Nederlandsch Radiogenootschap

November 1949 **Deel XIV No. 6**

Enige theoretische beschouwingen en experimenten over trillingverschijnselen in circuits met niet lineaire elementen

door G. J. Elias en S. Duinker

SUMMARY

After a short introduction, an analysis is given of the solutions of the equation $\ddot{y} + y + \nu y^3 = a \cos(\phi x + \varphi)$, describing the behavior of a non-linear electric circuit with a sinusoidal e.m.f. The existence of periodic solutions, with a fundamental frequency being a submultiple of the generator-frequency, is proved.

The period can be expressed as an elliptic integral in the event of free vibrations; for forced vibrations an extension of this expression is given and the stability of the solution is discussed with respect to the possible real values, one of the parameters can have. If the e.m.f. is varied continuously, several jump-phenomena must occur in order to sustain a periodic forced vibration in a fundamental or subharmonic frequency.

The differential equation is also considered, if the non-linear relation is extended with an unrestricted number of odd powers of y. In this case, the expression for the period becomes a hyperelliptic function. If sinh y is used instead of a power series, again an elliptic function results.

At last experiments are discribed, being chiefly in accordance with the preceeding mathematical investigations, in particular concerning the higher jump-boundaries for larger values of the e.m.f. Oscillograms of subharmonic vibrations with a fundamental frequency up to the 21st, are shown.

Inleiding.

De consequenties van het niet-lineaire verband tussen de physische grootheden van electrische circuits, op de zich daarin afspelende verschijnselen, is reeds sedert geruimen tijd een onderwerp van onderzoek geweest in de electrotechniek.

In 1910 verscheen een publicatie van Martienssen 1), waarin langs mathematische weg getracht werd, het kip-ver-

schijnsel, dat optrad in niet-lineaire seriekringen, zoals voor het eerst werd beschreven door Béthenod 2), te verklaren. Naderhand werd dit probleem o.a. ook door Biermanns 3) en Rüdenberg 4) ter hand genomen.

Door Mauduit 5) werden in 1926, bij de bestudering van de invloed van een inschakelstoot op een niet-lineaire kring, oscillogrammen verkregen, waarop subharmonischen van de generatorfrequentie waren waar te nemen. Een uitvoerige beschrijving over deze onderwerpen is gegeven door Rouelle 6, 7, 8).

Uit deze tijd stamt ook de misleidende benaming „ferroresonantie", waarmee de met het kippen verband houdende verschijnselen veelal worden aangeduid.

Fallou 9) ontwierp een frequentiedeler, gebaseerd op het circuit van Mauduit. Ook het kipverschijnsel vond practische toepassing, o.a. in relais voor controle-systemen, zoals te vinden is in artikelen van Suits 10) en Thomson 11).

Later werden ook in andere niet-lineaire circuits, die voor de electro-techniek van belang zijn, kipverschijnselen en subharmonischen gevonden, b.v. door Pederson 12) in luidspreker-systemen; het probleem is daar van electromechanische aard. Een zeer uitgebreide literatuur bestaat over de zuiver mechanische analogie van deze verschijnselen, b.v. de gedwongen trillingen van niet-lineaire veren, behandeld door den Hartog 13, 14). Meer algemene niet-lineaire mechanische problemen zijn uitgewerkt door Krylov en Bogoliuboff 15). Verschillende iteratieve methoden, die zijn toegepast voor de benaderende oplossingen van de niet-lineaire differentiaalvergelijkingen, die bij deze problemen een rol spelen, zijn door Friedrichs en Stoker 16) behandeld.

In de literatuur, waarnaar hierboven werd verwezen, wordt vrijwel zonder uitzondering het geval beschouwd van een kleine afwijking van de lineariteit, waardoor veelal de vergelijkingen tot een bekend type kunnen worden teruggevoerd. Evenwel kunnen niet alle, aan niet-lineaire systemen inhaerente eigenschappen op een dergelijke wijze worden verklaard. In het volgende is nu getracht, door uit te gaan van een meer algemene opzet van het probleem, ook de, voor zover ons bekend, tot dusverre onbekende eigenschappen van deze systemen naar voren te brengen, n.l. het optreden van meerdere kipgrenzen en de instabiele en subharmonische trillingstoestanden in de omgeving daarvan. Ofschoon de mathematische behandeling zich

moeilijk leent tot het maken van numerieke benaderingen, laten de experimenten zich toch aan de hand van de berekeningen bevredigend verklaren.

Tenslotte wordt een beschrijving gegeven van de experimenten, terwijl de resultaten, welke hierbij werden verkregen, aan de hand van oscillogrammen worden besproken.

Literatuur

1) O. Martienssen, Phys. Zeitschr. 11 (1910), p. 448.
2) J. Béthenod, l'Eclairage Electr. 53 (1907), p. 289.
3) J. Biermanns, Arch. f. Electr. 10 (1922), p. 30.
4) R. Rüdenberg, Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech. (1923) p. 454.
5) A. Mauduit, Rev. Gén. de l'Electr. 19 (1926) p. 937.
6) E. Rouelle, C. R. de l'Acad. des Sc. 185 (1927) p. 1450.
7) E. Rouelle, idem, 188 (1929) p. 1392.
8) E. Rouelle, Rev. Gén. de l'Electr. 27 (1934) pp. 715, 763, 795, 841.
9) J. Fallou, idem, 19 (1926), p. 987.
10) C. G. Suits, Summer Convention AIEE, Cleveland, June 1932.
11) W. T. Thomson, AIEE Transact. 57 (1938), p. 469.
12) P. O. Pederson, Journ. Acoust. Soc. Am. 6 (1935), p. 227 en 7 (1935), p. 64.
13) J. P. den Hartog, Journ. Appl. Mech. 3 (1936) A-127.
14) J. P. den Hartog, Mechanical vibrations, McGraw-Hill, 2nd ed. (1940), Ch. VII, VIII.
15) N. Krylov en N. Bogoliuboff, Introduction to non linear Mechanics, Princeton, 1943.
16) K. O. Friedrichs en J. J. Stoker, Quart. Appl. Math. 1 (1943) p. 97.

---

§ 1.

In een vorige publicatie [1]) werd de mogelijkheid van het optreden van subharmonische frequenties beschouwd naar aanleiding van een aldaar opgestelde differentiaalvergelijking. Deze beschrijft het gedrag van een serieschakeling van een wikkeling op een ferromagnetische kern — welk element dus een niet

[1]) G. J. Elias T. Ned. Radiogen. XIII (1948) p. 37.

lineaire karakteristiek bezit — een condensator en een te verwaarlozen weerstand, terwijl het circuit onderworpen is aan een uitwendige emk.

Na gesteld te hebben:

$$y = \Psi/\Psi_0; \quad a = \hat{e}\,\omega\, C/i_0; \quad p = \omega/\omega_0; \quad x = t\sqrt{i_0/C\,\Psi_0},$$

werd voor de magnetische flux Ψ de volgende vergelijking verkregen, waarbij het niet lineaire verband tussen Ψ en i tot uiting wordt gebracht door de term νy^3.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y + \nu y^3 = a \cos(px + \varphi) \tag{1}$$

Hierin zijn Ψ_0 en i_0 constanten, waarvan het quotiënt Ψ_0/i_0 bepaald wordt door de helling van de raaklijn aan de $\Psi - i$ kromme in de oorsprong, welk quotiënt als coëfficiënt van zelfinductie L kan worden gedefiniëerd. Verder is $\omega_0^2 LC = 1$, waardoor ω_0 gedefiniëerd is. Tenslotte is ω de generatorfrequentie, $\hat{e}$ de amplitudo van de uitwendige emk, terwijl ν een kleine grootheid wordt verondersteld.

Evenals vroeger kunnen we invoeren $w = \dfrac{dy}{dx}$, hetgeen geeft:

$$w\frac{dw}{dy} + y + \nu y^3 = a \cos(px + \varphi).$$

Na differentiatie naar y kan de variabele x worden geëlimineerd, waardoor verkregen wordt

$$p^2 (w w' + y + \nu y^3)^2 + w^2 (w w'' + w'^2 + 1 + 3\nu y^2)^2 = a^2 p^2. \tag{2}$$

We stellen nu

$$w^2 = a_0 + a_2 y^2 + \nu z$$

waarin z een functie is van y. Bij invoering hiervan in (2) wordt verkregen bij behoud van termen met de eerste macht van ν alleen:

$$(p^2 + a_2)(1 + a_2)^2 y^2 + a_0(1 + a_2)^2 + 2\nu(1 + a_2)\left\{p^2 y\left(y^3 + \frac{z'}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + (a_0 + a_2 y^2)\left(\frac{z''}{2} + 3y^2\right)\right\} + \nu z (1 + a_2)^2 = a^2 p^2.$$

Indien $\nu = 0$ — het lineaire geval — wordt hieraan voldaan door:

$$p^2 + a_2 = 0 \quad ; \quad a_0 = \frac{a^2 p^2}{(1 + a_2)^2} .$$

Is $\nu << 1$, dan kan gesteld worden:

$$p^2 + a_2 = \varepsilon \quad ; \quad z = \beta y^4 + \zeta \quad ; \quad a_0 = \frac{a^2 p^2}{(1 + a_2)^2} .$$

Bij invoering hiervan in bovenstaande vergelijking en substitutie van $a_2 = -p^2$ in de met ε resp. ν evenredige termen wordt hieraan voldaan door:

$$\beta = \frac{4 p^2}{1 - 9 p^2} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{6 \nu a_0}{9 p^2 - 1} \quad ; \quad \zeta = 0 ,$$

zodat

$$z = \frac{4 p^2 y^4}{1 - 9 p^2} ,$$

en verder

$$w^2 = a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4 . \tag{3}$$

waarin

$$a_2 = -p^2 + \varepsilon \quad ; \quad a_4 = \frac{4 p^2 \nu}{1 - 9 p^2} .$$

Op deze wijze wordt een oplossing van (1) verkregen, die zich aansluit bij het lineaire geval. Door substitutie van ε in bovenstaande uitdrukkingen voor a_0 en a_2 wordt verkregen:

$$a_0 \left(1 - p^2 + \frac{6 \nu a_0}{9 p^2 - 1} \right)^2 = a^2 p^2 . \tag{4}$$

Differentatie naar a geeft:

$$\frac{da_0}{da} \left(1 - p^2 + \frac{6 \nu a_0}{9 p^2 - 1} \right) \left(1 - p^2 + \frac{18 \nu a_0}{9 p^2 - 1} \right) = 2 a p^2 .$$

Hieruit volgt, dat voor $1 - p^2 + \left(\frac{18 \nu a_0}{9 p^2 - 1} \right) = 0$; $\frac{da_0}{da} = \infty$ bij eindige waarde van a_0 en a. Aldus wordt de maximale waarde van a bepaald, waarbij nog een oplossing van dit type mogelijk is. Er wordt dan verkregen:

$$a_0 = \frac{(p^2 - 1)(9 p^2 - 1)}{18 \nu} ,$$

en verder

$$\varepsilon = \frac{p^2 - 1}{3} \quad ; \quad 1 + a_2 = \tfrac{2}{3}(1 - p^2) \ ,$$

zodat

$$a_0 = \frac{(p^2 - 1)(9p^2 - 1)}{18\nu} = \frac{9a^2p^2}{4(1 - p^2)^2} \ .$$

De zoëven bedoelde waarde van a wordt dus gegeven door

$$a^2p^2\nu = \tfrac{2}{81}(p^2 - 1)^3(9p^2 - 1) \ , \tag{5}$$

waarbij moet worden opgemerkt, dat weerstand en hysteresis grote invloed op deze grenswaarde hebben. Deze waarde voor a is als een benadering te beschouwen, aangezien termen met hogere machten van ν verwaarloosd zijn. Ook is deze methode niet te bezigen voor $p^2 = 1$.

§ 2.

Een andere wijze van behandeling — eveneens een benadering — bestaat daarin, dat (3) gesubstitueerd wordt in (2) en de grootheden a_0, a_2 en a_4 bepaald worden door de coëfficiënten van de opeenvolgende machten y^0, y^2 en y^4 gelijk nul te stellen. Zodoende wordt voor a_2 de vergelijking verkregen:

$$(p^2 + a_2)(1 + p^2 + 10a_2) + \frac{6a^2p^2\nu}{(1 + a_2)^2} = 0 \ , \tag{6}$$

terwijl verder:

$$a_0 = \frac{a^2p^2}{(1 + a_2)^2} \quad ; \quad 2a_4 = -\nu\,\frac{p^2 + 9a_2}{1 + p^2 + 10a_2} \ . \tag{7}$$

Wordt in (6) in de factor $1 + p^2 + 10a_2$ gesteld $a_2 = -p^2$, dan verkrijgen we een derdemachts vergelijking in $1 + a_2$, die één of drie reëele wortels oplevert, al naar gelang de waarde van a, waarbij de overgang gevormd wordt door (5).[1])

Verder worden bij deze wijze van oplossing dezelfde resultaten verkregen als in het geval van § 1, althans voor de kleinere waarden van p, waartoe (6) beperkt is. Stellen we daartoe in de factor $1 + p^2 + 10a_2$, $p^2 = 1$ en $a_2 = -p^2 = -1$, dan volgt:

$$(p^2 + a_2)(1 + a_2)^2 = \tfrac{3}{4}a^2p^2\nu \ .$$

Is nu $p^2 = 1 + \eta$ $(\eta \ll 1)$, dan verkrijgt men:

[1]) Zie fig. p. 172.

$$(1 + a_2)^3 + \eta (1 + a_2)^2 = \tfrac{3}{4} a^2 p^2 \nu$$

welke vergelijking drie reëele wortels heeft voor $4 \eta^{3/2} > 9 a p \nu^{1/2}$, hetgeen overeenkomt met (5), waarin in de factor $9 p^2 - 1$, $p = 1$ gesteld is.

Voor $\eta = 0$, dus $p^2 = 1$, wordt verkregen:

$$(1 + a_2) = \left(\frac{3 a^2 \nu}{4}\right)^{1/3},$$

zodat

$$a_0 = \left(\frac{4 a}{3 \nu}\right)^{2/3}.$$

§ 3.

Uit (6) kunnen twee oplossingen voor a_2 – en daarmee voor a_0 – verkregen worden, die physische betekenis hebben; van de andere twee is er, zoals vroeger vermeld werd[1]), één, die labiel is, terwijl de vierde geen physische betekenis heeft, hetgeen kan worden ingezien door $\nu = 0$ te stellen. Van de twee bruikbare oplossingen sluit de kleinste zich aan het lineaire geval aan en wordt nul voor $a = 0$, terwijl de andere, de zgn. „grote" oplossing ook voor $a = 0$ eindig is.

Nu zal bij de gebezigde benadering, waarbij alleen gebruik gemaakt is van (3) zonder verdere machten van y^2, als gevolg hiervan, de periode vooral bij de „grote" oplossing afwijken van die van de emk, terwijl er toch zoals we verderop zullen zien, een periodieke oplossing moet bestaan met een periode overeenkomende met die van de emk. Teneinde hieraan tegemoet te komen kunnen we wederom (3) bezigen met de uitdrukkingen (7) voor de coëfficiënten a_0 en a_4, terwijl a_2 niet uit (6) wordt bepaald, doch met behulp van de voorwaarde voor de periodiciteit.

Zodoende wordt verkregen:

$$w^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2 p^2}{(1 + a_2)^2} + a_2 y^2 - \frac{\nu}{2} \frac{p^2 + 9 a_2}{1 + p^2 + 10 a_2} y^4,$$

waaruit volgt:

[1]) Zie G. J. Elias, loc. cit. p. 43.

$$x + C = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2 p^2}{(1 + a_2)^2} + a_2 y^2 - \frac{\nu}{2} \frac{p^2 + 9 a_2}{1 + p^2 + 10 a_2} \cdot y^4}} .$$

Stellen we $y = qt$, dan wordt, daar:

$$a_0 = \frac{a^2 p^2}{(1 + a_2)^2},$$

$$x + C = \frac{q}{\sqrt{a_0}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{a_2 (1 + a_2)^2}{a^2 p^2} \cdot q^2 t^2 - \frac{\nu}{2} \frac{(1 + a_2)^2 (p^2 + 9 a_2)}{a^2 p^2 (1 + p^2 + 10 a_2)} q^4 t^4}},$$

waarvoor geschreven kan worden:

$$x + C = \frac{q}{\sqrt{a_0}} \int \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}},$$

waarin:

$$k^2 = - \frac{\nu}{2} \frac{(1 + a_2)^2 (p^2 + 9 a_2)}{a^2 p^2 (1 + p^2 + 10 a_2)} \cdot q^4 , \tag{8}$$

terwijl voor q^2 de vergelijking geldt:

$$q^4 - \frac{2 a_2}{\nu} \frac{1 + p^2 + 10 a_2}{p^2 + 9 a_2} \cdot q^2 = \frac{2 a^2 p^2}{\nu} \cdot \frac{1 + p^2 + 10 a_2}{(1 + a_2)^2 (p^2 + 9 a_2)} . \tag{9}$$

De grondperiode bedraagt:

$$X = \frac{4 q}{\sqrt{a_0}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{2 \pi}{p} , \tag{10}$$

aangezien $2 \pi / p$ de periode van de emk is. Uit (10) kan nu de nog onbekende grootheid a_2 en daarmee a_0 worden bepaald, nadat q uit (9) is berekend.

Voor $a \rightarrow 0$ wordt uit (9) één wortel q^2 verkregen, die nul wordt voor $a = 0$, waarvoor geldt

$$q^2 = - \frac{1}{a_2} \frac{a^2 p^2}{(1 + a_2)^2} = - \frac{a_0}{a_2} .$$

Daar voor $a = 0$ ook $k^2 = 0$, volgt in dit geval $a_2 = -p^2$, dus,

$$a_0 = \frac{a^2 p^2}{(1 - p^2)^2} \quad ; \quad q = \frac{a}{1 - p^2},$$

zoals te verwachten was, aangezien we nu immers het lineaire geval hebben teruggekregen.

De andere wortel q^2 voor $a = 0$ wordt:

$$q^2 = \frac{2 a_2}{\nu} \frac{1 + p^2 + 10 a_2}{p^2 + 9 a_2}.$$

Aangezien thans q imaginair wordt ($a_2 < 0$), moeten we hier de imaginaire periode van de functie van Jacobi bezigen, n.l.

$$X = \frac{4 q}{\sqrt{a_0}} \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{2 \pi}{p}. \tag{11}$$

Met behulp van de bekende uitdrukkingen hiervoor[1]) vinden we

$$4 \varrho^{-1/2} \ln \varrho \, . \, K(\varrho) = \frac{\pi}{2 p},$$

indien $\varrho = \dfrac{8 a^2 p^2 \nu}{(1 + a_2)^2}$, terwijl $K(\varrho) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$,

met $k^2 = -16/\varrho$, hetgeen volgt uit (8), waarin $1 + a_2 \to 0$. Uit bovenstaande uitdrukking voor ϱ volgt een eindige waarde voor ϱ, zodat inderdaad $1 + a_2 \to 0$, als $a \to 0$.

§ 4[2]).

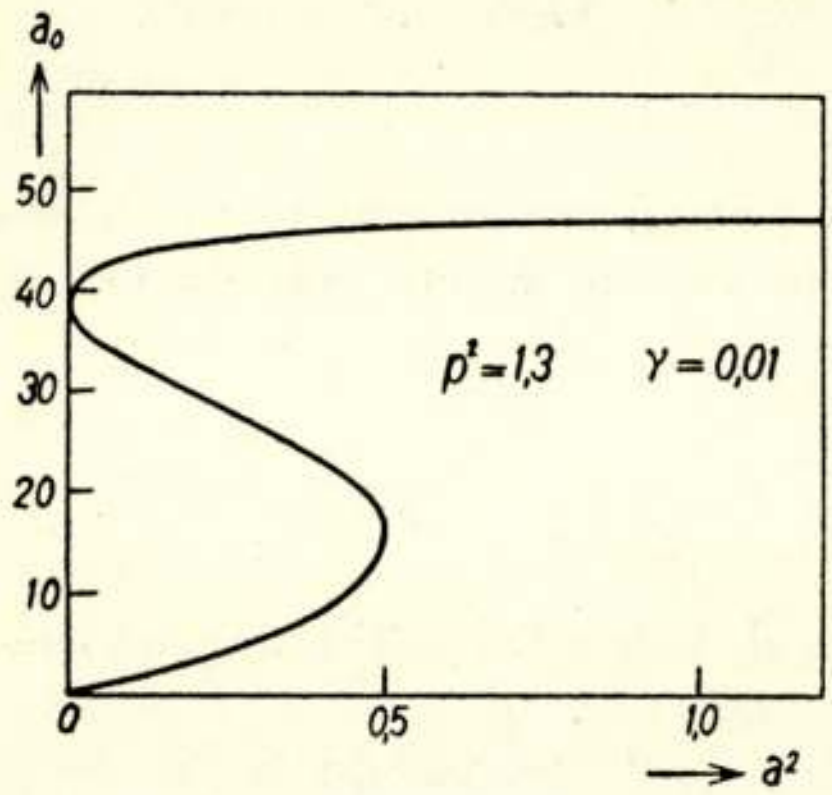
Het in het voorgaande behandelde geldt de onderste twee takken van de $a_0 - a^2$ kromme in bijgaande figuur, die wat deze betreft, veel overeenkomst vertoont met de figuur in de vroegere publicatie. Voordat we verder gaan, zal het bestaan worden aangetoond van de „grote" oplossingen van (1), waarvan in § 3 sprake was. Teneinde de mogelijkheid hiervan in te zien, stellen we in (1) $y = \nu^{-1/2} u$, waardoor verkregen wordt:

[1]) Zie hiervoor o.a. Whittaker & Watson, Modern Analysis, 4e druk, 1946, hoofdst. XXI en XXII.

[2]) Voor de beschouwingen in deze paragraaf zijn wij dank verschuldigd aan Prof. Dr. N. G. de Bruyn.

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + u + u^3 = \varepsilon \cos (p x + \varphi) , \tag{12}$$

waarin $\varepsilon = a \nu^{1/2}$. Volgens een bekende stelling van Poincaré[1]) bestaat er een oplossing van deze vergelijking, die in de omgeving van $\varepsilon = 0$ analytisch in ε is. Aangetoond moet worden, dat deze oplossing periodiek kan zijn.



Laat de periode voor $\varepsilon = 0$ gegeven zijn door

$$X = 4 m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \varphi}{\sqrt{1 + a^2 + \frac{a^2}{2} \cos^2 \varphi}} = \frac{2 \pi n}{p} , \tag{13}$$

waarin a de amplitudo is voor $\varepsilon = 0$. Voor (12) met $\varepsilon = 0$ kan n.l. geschreven worden, als $w = \frac{du}{dx}$,

$$w \frac{dw}{du} + u + u^3 = 0 ,$$

$$\text{of} \quad w^2 = a_0 - u^2 - \frac{u^4}{2} , \quad \text{zodat} \quad dx = \frac{du}{\sqrt{a_0 - u^2 - \frac{u^4}{2}}}$$

[1]) H. Poincaré, Acta math. 13 (1890), p. 9.
P. Painlevé, Enc. d. Math. Wiss. II. Bd., 1 . 1, § 4 a, p. 205.

Met $u = \beta t$ wordt verkregen

$$dx = \frac{\beta}{\sqrt{a_0}} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \tag{14}$$

als $\beta^2 = \sqrt{1 + 2 a_0} - 1 \quad , \quad k^2 = - \beta^4 / 2 a_0 .$

De amplitudo wordt verkregen uit $a_0 - \hat{u}^2 - \frac{\hat{u}^4}{2} = 0$,

dus $\hat{u}^2 = \sqrt{1 + 2 a_0} - 1$, zodat $\beta = \hat{u}$. Ook is $2 a_0 = (1 + \beta^2)^2 - 1 = \beta^2 (2 + \beta^2)$. Anderzijds kan voor (13) geschreven worden, als $\sin \varphi = t$,

$$X = \frac{4 m}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2}}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}, \qquad \text{waarin } k^2 = - \frac{\alpha^2}{2 + \alpha^2} .$$

We zien onmiddellijk, dat beide uitdrukkingen voor k^2 met elkaar overeenstemmen, als $\alpha = \beta$, derhalve is α de amplitude.

Dan volgt ook uit (14)

$$X = \frac{4 m \alpha}{\sqrt{a_0}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{2 \pi n}{p} , \tag{15}$$

waarin $k^2 = - \alpha^4 / 2 a_0$, terwijl $\alpha^2 = \sqrt{1 + 2 a_0} - 1$.

De amplitudo α geldt nu voor $\varepsilon = 0$. Zij voor $\varepsilon \neq 0$ de oplossing van (12) $y = G(b, \varepsilon, \varphi, x)$, waarin b de waarde van y zij voor $x = 0$, welke waarde we als een maximum aannemen. Dan geldt dus

$$G(b, \varepsilon, \varphi, 0) = b \quad ; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{b, \varepsilon, \varphi, 0} = 0 .$$

Bestaat er een periode X, dan moet gelden:

$$G(b, \varepsilon, \varphi, X) = b \quad ; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{b, \varepsilon, \varphi, X} = 0 .$$

Aangezien X een constante grootheid is, kan gesteld worden

$$G(b, \varepsilon, \varphi, X) = f(b, \varepsilon, \varphi) ,$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{b, \varepsilon, \varphi, X} = g(b, \varepsilon, \varphi) .$$

Dan is $f(b, \varepsilon, \varphi) = b$ en $g(b, \varepsilon, \varphi) = 0$. Uit de laatste vergelijking volgt $b = P(\varepsilon, \varphi)$, waarop de eerste vergelijking geeft $f\{P(\varepsilon, \varphi), \varepsilon, \varphi\} = P(\varepsilon, \varphi)$, zodat φ een functie van ε moet zijn.

Voorts is $f(a, 0, \varphi) = a$ en $g(a, 0, \varphi) = 0$, zodat $a = P(0, \varphi)$

De vergelijking $b = P(\varepsilon, \varphi)$ geeft nu, aangezien de oplossing in de omgeving van $\varepsilon = 0$ analytisch is,

$$b = P(0, \varphi) + \varepsilon \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = 0} + \ldots\ldots ,$$

dus

$$b = a + \varepsilon \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial P}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon = 0} + \ldots\ldots .$$

Hiermee is dus het bestaan van een periodieke oplossing aangetoond met amplitudo b, die in het algemeen zal verschillen van de amplitudo voor $\varepsilon = 0$.

In (13) resp. (15) is n de rangorde der subharmonischen, m die van de bovenharmonischen van de frequentie der emk.

§ 5.

Teneinde nu een oplossing van (12) te verkrijgen, gaan we op soortgelijke wijze te werk als in het voorgaande geval, doch beschouwen nu niet $p^2 + a_2$ als een kleine grootheid, doch $1 + a_2$. Uit de verg. (12) verkrijgen we thans na eliminatie van x, als $w = \dfrac{du}{dx}$,

$$p^2 (ww' + u + u^3)^2 + w^2 (ww'' + w' + 1 + 3u^2)^2 = a^2 p^2 \nu . \quad (16)$$

Hierin stellen we $w^2 = a_0 + a_2 u^2 + z$, waarin z een functie van u is. Op die wijze verkregen:

$$(p^2 + a_2)(1 + a_2)^2 u^2 + a_0 (1 + a_2)^2 + 2(1 + a_2) \left\{ p^2 u \left(u^3 + \frac{z'}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + (a_0 + a_2 u^2) \left(\frac{z''}{2} + 3u^2 \right) \right\} + (a_0 + a_2 u^2 + z) \left(\frac{z''}{2} + 3u^2 \right)^2 +$$

$$+ p^2 \left(u^3 + \frac{z'}{2} \right)^2 + z(1 + a_2)^2 + 2z(1 + a_2) \left(\frac{z''}{2} + 3u^2 \right) = a^2 p^2 \nu .$$

We stellen hierin $a_0 (1 + a_2)^2 = a^2 p^2 \nu$, waaruit voor $1 + a_2 = 0$ alleen een eindige waarde van a_0 resulteert, indien $a = 0$. Wordt

nu $1 + a_2$ als een kleine grootheid beschouwd, dan volgt uit bovenstaande vergelijking, dat $u^3 + z'/2$ van de orde van $1 + a_2$ is, zodat gesteld kan worden

$$z' = -2u^3 + 2(1 + a_2)\zeta' \qquad \text{of wel} \qquad z = -u^4/2 + 2(1 + a_2)\zeta ,$$

waarin ζ een funtie van u zal zijn. Bij invoering hiervan wordt verkregen na deling door $(1 + a_2)^2$:

$$(p^2 + a_2)u^2 + 2\{p^2 u\zeta' + (a_0 + a_2 u^2)\zeta''\} +$$

$$\left\{a_0 + a_2 u^2 - \frac{u^4}{2} + 2(1 + a_2)\zeta\right\}\zeta''^2 + p^2\zeta'^2 + 2(1 + a_2)\zeta - \frac{u^4}{2} +$$

$$+ 2\left\{2(1 + a_2)\zeta - \frac{u^4}{2}\right\}\zeta'' = 0 .$$

Hieraan zal voldaan kunnen worden door

$$\zeta = \zeta_0 + (1 + a_2)\zeta_1 + (1 + a_2)^2\zeta_2 + \ldots ,$$

waarbij voor ζ_0 geldt:

$$(p^2 - 1)u^2 + 2\{p^2 u\zeta_0' + (a_0 - u^2)\zeta_0''\} + \left(a_0 - u^2 - \frac{u^4}{2}\right)\zeta_0''^2 +$$

$$+ p^2\zeta_0'^2 - \frac{u^4}{2} - u^4\zeta_0'' = 0 .$$

Op deze wijze kan z in de omgeving van $a_2 = -1$ als een analytische functie van $1 + a_2$ worden ontwikkeld. Naarmate $a^2p^2\nu$ kleiner is, zal a_2 minder van -1 verschillen en zal de reeks met minder termen kunnen worden benaderd.

Voor $a^2p^2\nu = 0$ $(\nu \neq 0)$ kan gesteld worden

$$w^2 = a_0 - u^2 - u^4/2 . \tag{17}$$

Deze uitdrukking kan ook onmiddellijk uit (16) worden verkregen. Voor $a^2p^2\nu = 0$ wordt aan deze vergelijking voldaan door $ww' + u + u^3 = 0$, dus $w^2 = a_0 - u^2 - u^4/2$.

Voor $a^2p^2\nu \neq 0$ wordt aan (16) voldaan door $ww' + u + u^3 = a\nu^{1/2} = \varepsilon$, dus $w^2 = a_0 - u^2 - \frac{1}{2}u^4 + 2\varepsilon u$. (18)

§ 6.

Ter oplossing van (1) zullen we de beide hierboven uiteengezette methoden kunnen bezigen.

Voor een emk nul geldt voor de periode verg. (13) resp. (15). Al naar gelang van de waarden van m en n zijn er verschillende mogelijkheden, waarbij telkens de waarde van de amplitudo (en mede van a_0) een andere zal zijn. Met $m = 1$ en $n = 1$ volgt uit (13) de waarde van de amplitudo (en ook van a_0), afhankelijk van p^2, terwijl telkens $a_2 + 1 = 0$. Echter is ook een oplossing van het in § 1 behandelde type mogelijk, waarbij $a_2 + p^2 = 0$, terwijl verder $\hat{y} = a/(1 - p^2)$ en $a_0 = a^2 p^2/(1 - p^2)^2$. Telkens wordt voor $m = n$ dezelfde amplitudo verkregen.

De integraal in (13) is slechts voor $\alpha = 0$ gelijk aan $\pi/2$; voor eindige waarde van α echter $< \pi/2$ en wel des te kleiner, naarmate α groter is. Derhalve zal bij $m = n$ en $p = 1$ slechts door $\alpha = 0$ aan (13) kunnen worden voldaan. Is $p < 1$, dan zou $m > n$ moeten zijn (zie hieronder). Is $p > 1$, doch verder $p \sim 1$, dan kan met $m = n$ aan (13) door een eindige waarde van α worden voldaan. Bij grote waarde van p zal zulks eveneens het geval zijn, zelfs ook voor $n > m$.

Zij de integraal in (13) gelijk aan $\pi \mu/2$, dan volgt uit (13)

$$m \mu = n/p , \tag{19}$$

waarin voor reëele amplitudo steeds $\mu < 1$. De periode bedraagt nu $2 \pi m \mu$; dit zal de periode van y zijn. Hogere harmonischen hiervan hebben de periode $2 \pi m \mu/m'$. Nu zal energie winst met behulp van de emk alleen mogelijk zijn, indien

$$2 \pi m \mu/m' = 2 \pi/p ,$$

daar $2 \pi/p$ de periode is van de emk. Hieruit volgt $\mu = m'/mp$. Met behulp van (19) wordt dan verkregen $m' = n$. We kunnen $2 \pi \mu$ de grondperiode noemen. Is $m = n$, dan valt de periode van de emk met de grondperiode samen. Aangenomen kan worden, dat deze toestanden een grotere mate van stabiliteit zullen bezitten dan die, waarbij $m \neq n$, in welke gevallen de energielevering geschiedt aan een hogere harmonische frequentie van een subharmonische van de grondfrequentie. In verband met de radiale symmetrie van de $\Psi - i$ karakteristiek, zullen de getallen m en n oneven zijn.

§ 7.

Indien de emk niet nul is, kunnen de $a_0 - a^2$ krommen verkregen worden met behulp van één der methoden van § 5. Bij kleinere waarden van $a^2 p^2 \nu$ kan als een eerste benadering (17)

worden gebezigd. Bij invoering hiervan in (16) kunnen de grootheden a_0, a_2 en a_4 worden berekend uit het nul stellen van de coëfficiënten van y^0, y^2 en y^4, zoals reeds in § 1 is uiteengezet. Daarbij wordt $1 + a_2$ als een kleine grootheid beschouwd. Op die wijze wordt de bovenste tak van de afgebeelde kromme verkregen. Om het verdere verloop van de kromme voor grotere waarden van $a^2 p^2 \nu$ te verkrijgen is echter zeer bezwaarlijk.

Ook kunnen we gebruik maken van (18). Met behulp hiervan wordt bij kleine waarde van ε^2 verkregen, na (18) tot een biquadratische gedaante herleid te hebben[1]).

$$X = \frac{4\,m\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1+2\,a_0}}}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{(1+2\,a_0)^2}\sqrt{1+\sqrt{1+2\,a_0}}\right]\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}},$$

waarin

$$k^2 = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1+2\,a_0}}}{\sqrt{1+\sqrt{1+2\,a_0}}}\cdot\left[1-\frac{2\,\varepsilon^2}{(1+2\,a_0)^{3/2}}\right]. \tag{20}$$

Verder is

$$u = -\frac{f_2\,.\sqrt{1+2\,a_0}\,.\,t_1}{1+\varepsilon\,f_2\,t_1\,(1+2\,a_0)^{-1/2}},$$

waarin:

$$f_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{1+2\,a_0}-1}{1+2\,a_0}\cdot\left\{1-\frac{2\,\varepsilon^2}{(1+2\,a_0)^{3/2}}\right\}} \text{ en } t_1 = sn\,\frac{x+c}{f_1},$$

als

$$f_1 = X\,.\left[4\,m\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}}\right]^{-1}$$

Met behulp van deze uitdrukkingen wordt het verloop der kromme in het (a_0, a^2)-vlak verkregen in de omgeving van het punt $m = n$ voor $a = 0$. Dit verloop wijkt enigszins af van dat in de figuur op blz. 172 in het voorgaande, hetgeen het gevolg is van het feit, dat bij deze laatste de periode zich langs

[1]) Zie Whittaker & Watson, loc. cit. pp. 513, 514.

de kromme wijzigt tengevolge van de gebezigde benadering (zie § 3), terwijl hier de periode constant blijft, zolang m en n dezelfde waarde behouden.

Bij toenemende waarde van a^2 zal de kromme $m = n$ stijgen, doch bij een zekere waarde van a^2 verandert het verloop. Het blijkt n.l., dat voor zeer grote waarde van de emk (waarbij ε ook niet langer klein is, doch groot), de waarde van a_0 imaginair wordt. Er moeten derhalve een oneven aantal punten zijn, waar de kromme omkeert en de raaklijn verticaal wordt. Bij toenemende waarde van a^2 moet dus de toestand overspringen op een andere kromme, b.v. $m = 3$; $n = 1$ of $m = 5$; $n = 3$, indien op deze kromme een reëele waarde van a_0 bestaat. Op laatstgenoemde krommen zal de toestand minder stabiel zijn (zie § 6). Echter is op deze laatste krommen een reëele waarde van a_0 ook niet overal mogelijk. Bij verdere toeneming van a^2 zal derhalve de toestand weer op een andere kromme moeten overspringen. Geeft de kromme $m = n$ voor die waarde van a^2 een reëele waarde van a_0, dan zal het mogelijk zijn weer op die kromme terug te springen, waar de toestand stabiel is. Bij verdere verhoging van a^2 zal de kromme $m = n$ weer verlaten moeten worden en treden minder stabiele toestanden op. Op deze wijze zullen gebieden van grotere en geringere stabiliteit elkaar afwisselen, zoals inderdaad wordt waargenomen. Daarbij kunnen in bepaalde intervallen. wanneer $n > 1$, subharmonischen optreden. Het telkens overspringen van de ene waarde van m op een andere, kan als „kippen" worden aangemerkt.

Bovenstaande beschouwingen zijn met name van betekenis, indien p weinig groter dan de eenheid is. Voor $p < 1$, doch $9p^2 - 1 > 0$, is er slechts één oplossing van (1), indien de keten weerstandsloos is en de hysteresis wordt verwaarloosd, aangezien dan niet meer voldaan kan worden aan (5) (bij ketens met weerstand is $p < 1$ ook mogelijk). Er bestaat dan derhalve geen „grote" oplossing, zodat in verband met het voorgaande ook geen subharmonischen mogelijk zijn.

Is p weinig groter dan 1, b.v. < 2, dan volgt uit (19), dat voor $n = 3$ (derde subharmonische) minstens $m = 3$ moet zijn, hetgeen zoals we zagen, pas mogelijk is na twee- of meermalen „kippen", d.w.z. bij grote waarde van de emk.

Is daarentegen $p >> 1$, dan kan b.v. de 5e of 7e harmonische optreden bij $m = n$, dus op de kromme, die na éénmaal kippen bereikt wordt; de hiertoe nodige emk is echter groot op grond van (5). Bij verlaging van de emk blijven we vóór

het terugkippen op de kromme $m = n$ en kunnen de subharmonischen nog bij lage waarden van de emk worden waargenomen. Zoals we verderop in § 15 nog zullen zien, is een en ander in hoofdzaak in overeenstemming met het experiment.

In vele gevallen wordt bij $p >> 1$ naast een zekere subharmonische, de derde bovenharmonische van die subharmonische waargenomen, b.v. naast de 15e of 21e subharmonische, de 5e resp. 7e subharmonische. Dan kan bij $n = 15$ resp. 21 $m = 5$ resp. 7 zijn. Uit (19) volgt dan, dat de amplitudo van de 5e resp. 7e subharmonische veel groter is dan die van de 15e resp. 21e. Ook dit stemt met het experiment overeen.

Bij grote waarde van p zal, zoals uit (5) blijkt, de emk voor het eerste kippen, dus om op de kromme $m = n = 1$ te komen, groot zijn, zodat de subharmonischen bij continue opvoering van de emk niet gemakkelijk te verkrijgen zullen zijn. Ze zullen beter verkregen worden door plotselinge impulsen, b.v. verkregen door het bij continue verlaging van de emk, snel passeren van de „knie" van de $\Psi - i$ kromme, of bij het plotseling inschakelen van een zekere emk.

§ 8.

In dit verband kan nog opgemerkt worden, dat er in dit niet-lineaire geval geen sprake is van resonantie in de gewone zin. Nemen we aan, dat de emk constant is, doch ω variëert. We zullen het verloop van a_0 bij constante emk doch variabele waarde van ω niet in bijzonderheden uiteenzetten, doch volstaan met het navolgende. Voor $\omega = \omega_0$, dus $p = 1$, wordt a_0 gegeven door de in § 2 vermelde waarde. Bij toename van ω neemt a_0 toe, totdat bij een zekere waarde van ω twee physisch mogelijke waarden van a_0 optreden (de derde is labiel). De grootste waarde van a_0, de voortzetting van het zoëven vermelde verloop vanaf $p = 1$, blijft toenemen, totdat bij een zekere waarde van ω deze tak ombuigt en a_0 terugvalt op de kleinste waarde, die dan bij verdere toename van ω het verloop van a_0 weergeeft. Er treedt op de bovenste tak een flauw maximum van a_0 op, kort vóór het terugvallen op de onderste tak, doch het gehele verloop wijkt sterk af van de resonantiekromme in het lineaire geval.

§ 9.

In § 1 en de verdere beschouwingen werd het niet-lineaire

verband tussen Ψ en i voorgesteld door slechts twee termen van een machtreeks. Dit zal hoogstens voldoende zijn voor betrekkelijk lage waarden van de magnetische inductie in het magnetisch circuit.

Meer algemeen kan in plaats van (1) worden gesteld

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + F(y) = a \cos(p x + \varphi), \tag{21}$$

waarin onder $F(y)$ een éénwaardige functie wordt verstaan. Op een dergelijke wijze als in § 4, kan dan worden aangetoond, dat aan (21) een periodieke oplossing voldoet, zolang a niet te groot is. We kunnen dan weer stellen $\frac{dy}{dx} = w$.

Na eliminatie van x wordt verkregen

$$p^2 \{w w' + F(y)\}^2 + w^2 \{w w'' + w'^2 + F'(y)\}^2 = a^2 p^2, \tag{22}$$

waaraan voldaan wordt door

$$w w' + F(y) = a,$$

dus

$$w^2 = a_0 - 2 \int F(y)\, d y + 2 a y \tag{23}$$

hetgeen geeft

$$x + c = \int \frac{d y}{\sqrt{a_0 - 2 \int F(y)\, d y + 2 a y}}.$$

Stellen we $F(y) = y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n+1} y^{2n+1} + \ldots\ldots$, waarbij de reeks zover kan worden voortgezet als voor de voorstelling van de B-H kromme gewenst is. Dan wordt

$$x + c = \int \frac{d y}{\sqrt{a_0 - (y^2 + \frac{a_3 y^4}{2} + \frac{a_5 y^6}{3} + \ldots\ldots + \frac{a_{2n+1} y^{2n+2}}{n+1} + \ldots\ldots + 2 a y}}$$

Bij invoering van $y = qt$ en $a = 0$ wordt verkregen

$$x + c = \frac{q}{\sqrt{a_0}} \int \frac{d t}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k_3^2 t^2) \ldots\ldots (1 - k_{2n+1}^2 t^2) \ldots\ldots}}, \tag{24}$$

waarin de grootheden $k_3^2, k_5^2, \ldots\ldots\ldots, k_{2n+1}^2, \ldots\ldots < 0$ zijn, aangezien $a_3, a_5, \ldots\ldots, a_{2n+1}, \ldots\ldots > 0$; althans voor de $\Psi - i$ kromme.

Voorts wordt:

$$y = q\,t = q\,.\,F\left\{\frac{\sqrt{a_0}}{q}(x+c)\,,\,k_3\,,\,k_5\,,\,\ldots\ldots,\,k_{2n+1}\,,\,\ldots\ldots\right\}.$$

Voor $k_5, \ldots, k_{2n+1}, \ldots = 0$ reduceert de functie zich tot die van Jacobi.

De periode is gegeven door

$$X = \frac{4\,m\,q}{\sqrt{a_0}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_3^2\,t^2)\ldots\ldots(1-k_{2n+1}^2\,t^2)\ldots\ldots}} = \frac{2\,\pi\,n}{p}\,. \quad (25)$$

Stellen we

$$\frac{4\,q}{\sqrt{a_0}}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_3^2\,t^2)\ldots\ldots(1-k_{2n+1}^2\,t^2)\ldots\ldots}} = 2\,\pi\,\mu\,,$$

dan komt er evenals vroeger $m\,\mu = n/p$ (19). Steeds zal zijn $\mu < 1$.

Evenals in § 7 worden thans in het $a_0 - a^2$-vlak krommen verkregen, waarop telkens m en n zekere waarden hebben. Echter zijn deze krommen niet meer te berekenen, aangezien we te maken hebben met hyper-elliptische integralen.

De hier beschreven oplossingen zijn aan te merken als „grote" oplossingen. Echter zullen er in het meer algemene geval ook oplossingen zijn, die nul worden voor $a = 0$, dus van het karakter van de in § 1 behandelde. Het levert geen moeilijkheden op de vergelijking (1) te dien einde met meer machten van y voort te zetten. Veel machten zijn hiertoe niet nodig, aangezien het de „kleine" oplossingen betreft.

§ 10.

Ook kan in (21) voor $F(y)$ worden ingevoerd sinh y, waardoor verkregen wordt, als $a = 0$,

$$x + C = \int \frac{dy}{\sqrt{a_0 - 2\cosh y}}\,.$$

Met $t = \sin j\,y/2$ wordt dit:

$$x + C = \frac{2}{j\sqrt{a_0 - 2}}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}}\,,$$

als $k^2 = -4/(a_0 - 2)$.

Voor een reëele periode zal zijn:

$$X = \frac{8\,m}{j\sqrt{a_0 - 2}} \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}} = \frac{2\,\pi\,n}{p}.$$

Stellen we weer:

$$2\,\pi\,\mu = \frac{8}{j\sqrt{a_0 - 2}} \int_0^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}},$$

dan verkrijgt men weer betrekking (19): $m\,\mu = n/p$, waarin $\mu < 1$.

Wordt $a_0 \to 2$, dan is $\mu \to 1$, terwijl voor $a_0 - 2 \to \infty$, $|k| \to 0$ verder

$$\mu \to \frac{2}{\pi} \frac{ln\, 4\,(a_0 - 2)}{\sqrt{a_0 - 2}}.$$

Derhalve is $0 < \mu < 1$, zodat er dus bij $m = n$ en $p > 1$ steeds een waarde van a_0 te vinden zal zijn, die aan (19) voldoet. Deze oplossing zal aan te merken zijn als een „grote" oplossing. Bij andere waarden van m en n behoort voor zover mogelijk een andere waarde van a_0. Dit alles geldt voor $a = 0$.

Is $a > 0$, dan zullen krommen in het $a_0 - a^2$-vlak verkregen worden, waarbij evenals in het vorige geval, de mogelijkheid van „kippen" zal bestaan, terwijl er eveneens subharmonischen kunnen optreden. Echter kan de desbetreffende integraal

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a_0 - 2\cosh y + 2\,a\,y}},$$

niet voor willekeurige waarde van a worden berekend.

De „kleine" oplossing, die voor $a = 0$ de amplitudo nul heeft, kan worden verkregen door $\cosh y$ in een reeks te ontwikkelen met medeneming van slechts enkele termen en dan te werk gaan, zoals in § 1 is uiteengezet.

§ 11

Werd in het voorgaande het optreden van kipverschijnselen en subharmonische trillingstoestanden in een aan een periodieke storing onderworpen niet-lineair circuit, aannemelijk gemaakt, thans zal een beschrijving worden gegeven van de experimenten en de resultaten, die daarbij aan de dag traden.

Aangezien het onderzoek gericht was op het verkrijgen van

inzicht in de zich afspelende verschijnselen in deze niet-lineaire trillingskringen, werd in eerste instantie van quantitatieve metingen afgezien en zullen onze mededelingen van zuiver qualitatieve aard blijven. Het zal daarbij blijken, dat in hoofdzaak de in het voorgaande langs theoretische weg gevonden conclusies, door de experimenten worden bevestigd.

De metingen werden verricht aan een circuit, bestaande uit een serieschakeling van een, als lineair te beschouwen, capaciteit en een op ferromagnetische kern gewikkelde en derhalve niet-lineair werkende smoorspoel. Deze kring was via een regeltransformator aangesloten op het 50 periodennet, waardoor de spanning op het circuit continu vanaf nul kon worden gevariëerd. De flux Ψ van de spoel kon worden waargenomen op het scherm van een kathodestraaloscillograaf, na integratie van de spoelspanning met behulp van een RC-integreercircuit. Teneinde de vorm van de stroomkromme te kunnen bestuderen werd nog een kleine weerstand R opgenomen, waarover een spanning werd verkregen evenredig met de stroomsterkte i. Stroom en flux werden zowel ieder afzonderlijk, als onderling gecoördineerd waargenomen, in welk laatste geval de met de hysteresislus vergelijkbare $\Psi - i$ kromme ontstond.

§ 12

Het is gebleken, dat het al of niet optreden van subharmonischen van de generatorfrequentie in de flux en stroom, in sterke mate afhangt van de aard van het kernmetaal. Het gunstigst voor het te voorschijn roepen van de subharmonischen blijkt te zijn een materiaal, waarvan het $\Psi - i$ verband, althans bij gedeelten in sterke mate niet-lineair is. Dit is o.a. het geval bij μ-metaal, dat aanvankelijk een betrekkelijk lineair verloop heeft waarna een vrij scherpe knie volgt, die overgaat in een min of meer lineair verzadigingsgebied. Het μ-metaal heeft bovendien een, in vergelijking met gewone qualiteiten transformatorblik, veel geringere hysteresis.

Voor de realisatie van het kipverschijnsel blijkt een veel geringere niet-lineariteit te zijn vereist, zodat daarvoor kan worden volstaan met gewoon blik.

Aangezien het van belang bleek, het optreden van subharmonischen in verband met de kipverschijnselen te onderzoeken (zie § 7), werden voor onze waarnemingen voornamelijk smoorspoelen met kernen van μ-metaal gebruikt.

Het is verder van belang, dat de weerstand in het circuit voldoende laag wordt gehouden. Kiest men de waarde van R te groot, dan heeft dit tot gevolg, dat in de eerste plaats het optreden van subharmonischen wordt onderdrukt, terwijl bij verdere vergroting tevens de kipverschijnselen gaan verdwijnen.

Voorts moet worden genoemd, de grote gevoeligheid van eventueel optredende subharmonischen wat hun stabiliteit betreft, voor kleine variaties in de netfrequentie. Bij de proefnemingen werd gebruik gemaakt van het lichtnet, waarvan de frequentie evenwel voor deze metingen te sterk variëert. Bij herhaling van de proeven met een spanningsgenerator, waarvan de frequentie in sterke mate constant werd gehouden, bleken ook voor die waarden van de amplitudo van de opgedrukte emk, waarbij aanvankelijk niet-periodieke trillingstoestanden werden waargenomen, min of meer stabiele subharmonischen te kunnen bestaan.

Wordt de emk plotseling met een bepaalde amplitudo op het circuit aangesloten, dan blijken zowel het kipverschijnsel, als de eventueel optredende gedwongen periodieke trillingen met sub- of grondharmonische frequentie, afhankelijk te zijn van de fase der emk op het moment van inschakelen. Over deze afhankelijkheid werd ook reeds in de vorige publicatie het een en ander medegedeeld. In § 4 werd afgeleid bij het existentiebewijs van periodieke oplossingen, dat deze afhankelijkheid tot uitdrukking brengt, dat de fase op het moment van inschakelen zekere betrekkingen in verband met de systeemgrootheden en de beginvoorwaarden moet vervullen, teneinde aan de eis van periodiciteit te kunnen voldoen. Wegens het ontbreken van de apparatuur, waarmee men de fase op het moment van inschakelen in de hand heeft, is deze afhankelijkheid nog niet verder onderzocht. Hetgeen in het volgende zal worden beschreven, heeft dan ook uitsluitend betrekking op dié inrichting van de proef, waarbij de amplitudo van de emk continu wordt gevariëerd.

§ 13

Als maatgevende grootheid voor het al of niet optreden van de onderhavige verschijnselen, zal formeel worden ingevoerd de grootheid $p = \omega/\omega_0$. Hierin stelt ω de generatorfrequentie voor, terwijl $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$, waarin L wordt gedefiniëerd als in § 1; L correspondeert dus met de waarde van de zelfinductie in

het lineaire geval. Dan is immers $\frac{d\Psi}{di} = L$ constant. In het niet-lineaire geval heeft $\frac{d\Psi}{di}$ voor alle buiten de oorsprong gelegen punten van de karakteristiek een waarde kleiner dan L.

Gevonden werd, dat p een waarde moet hebben, groter dan een in de buurt van de eenheid gelegen getal, willen kipverschijnselen en subharmonischen kunnen optreden (zie ook (5)). De aard van de optredende verschijnselen hangt in sterke mate af van het feit hoeveel groter men p kiest dan de zoëven genoemde grenswaarde. We zullen dan ook in het volgende trachten het qualitatief gedrag der verschijnselen in te delen en te bespreken, al naar gelang de grootte van p.

§ 14.

Gaat men uit van een waarde van p gelegen tussen de grenswaarde en een waarde van ongeveer 3, dan neemt men bij continu opregelen van de amplitudo der sinusvormige emk waar, dat bij een bepaalde waarde van de amplitudo, de nog nagenoeg enkelvoudig harmonische trillingstoestand van de flux, plotseling overgaat in een toestand, die aanzienlijk vervormd is. Deze overgang gaat met een fasesprong gepaard en is het welbekende „kip"-verschijnsel. Men kan zich hiervan een duidelijke indruk vormen aan de hand van de oscillogrammen 1 en 2, die één periode van de flux te zien geven, vóór resp. na het kippen. Dat dit kippen inderdaad een zeer abrupt karakter heeft, moge blijken uit het feit, dat de met elk van de toestanden corresponderende amplitudines van de emk, slechts ca. 1% van elkaar verschilden.

Indien men bij de gekipte toestand voortgaat, de amplitudo van de emk te verhogen, dan ziet men de vervorming zeer snel toenemen. De toestand blijft echter stabiel en heeft de generatorfrequentie tot grondfrequentie. Tenslotte wordt een toestand bereikt, die niet meer stabiel is te noemen, aangezien hiervan geen stilstaand beeld op de oscillograaf is te krijgen. Deze instabiele trillingstoestanden kenmerken zich door het voortdurende sprongsgewijs wisselen van de grondfrequentie, welke daarbij waarden aanneemt van de generatorfrequentie of de een of andere subharmonische daarvan. Tegelijkertijd treden voortdurende fasesprongen op. Van een bepaalde trillingstoestand is hier dus geen sprake.

In deze niet-stabiele gebieden zijn min of meer stabiele periodieke trillingstoestanden mogelijk, waarbij dan evenwel de grondfrequentie steeds een subharmonische is van de generatorfrequentie. Deze toestanden zijn reproduceerbaar. In de oscillogrammen 3 en 4 ziet men enkele illustraties van deze gevallen. Men ziet hierop een periode van de flux resp. stroom met een derde subharmonische grondfrequentie. Oscillogram 5 geeft een periode van de flux met een vijfde subharmonische. Deze krommen zijn aanzienlijk vervormd.

Bij nog verder opregelen van de emk begeeft men zich weer in een gebied, waarin een stabiele trilling met 50 Hz als grondfrequentie optreedt. Dit gebied wordt weer gevolgd door een instabiel gebied van hetzelfde karakter als hiervoor werd geschetst.

Men heeft dus te maken met elkaar afwisselende stabiele en instabiele gebieden, naarmate men de emk opvoert. In de instabiele gebieden kunnen subharmonische toestanden optreden, die een zekere mate van stabiliteit bezitten. In verband met het voorgaande kunnen deze toestanden geidentificeerd worden met de „grote" oplossingen van de systeemdifferentiaalvergelijking waarvan in § 7 sprake was. Met elk van deze toestanden correspondeert dus een bepaalde waarde voor m en n. Indien m en n aan elkaar gelijk worden verkrijgen we weer een grondharmonische trillingstoestand. In de instabiele gebieden verspringen de waarden van m en n voortdurend, zodat daar geen bepaalde trillingstoestand te definiëren valt.

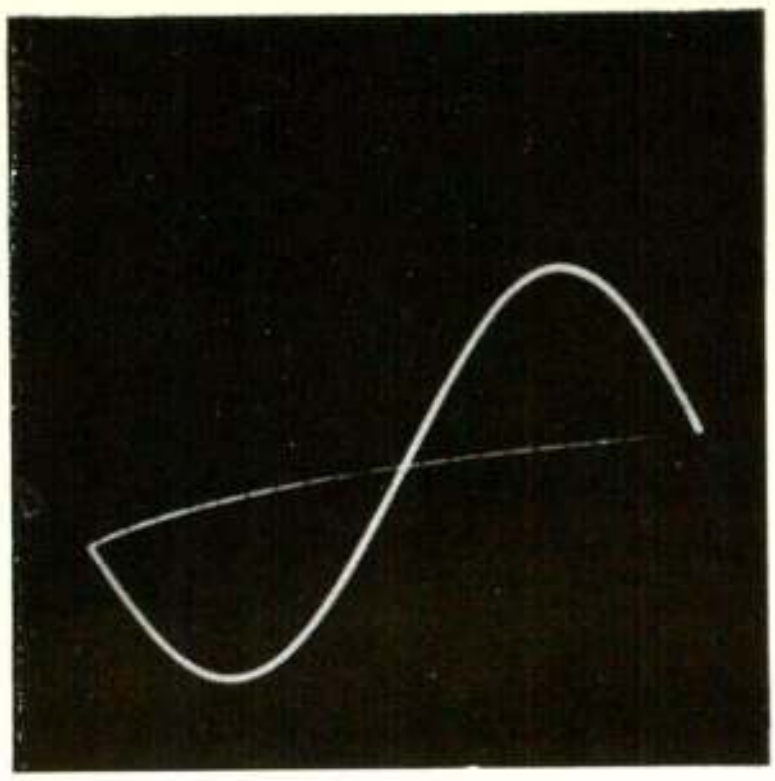
Laat men vervolgens de amplitudo der emk weer afnemen, dan krijgt men wederom met deze gebieden te maken, waarbij evenwel de stabiliteitsgrenzen enigszins anders komen te liggen. Al terugregelende, zal bij een bepaalde waarde van de amplitudo de trillingstoestand terugkippen in een toestand, die weer nagenoeg enkelvoudig harmonisch is. Ook hier ligt de kipgrens weer enigszins lager dan bij het heenkippen.

Naarmate men de condensatorwaarde en daarmee de waarde van p groter kiest, verschuiven de grenzen van deze gebieden naar hogere waarden van de spanning, terwijl het traject, waarover deze gebieden stabiel resp. instabiel zijn, ook groter wordt.

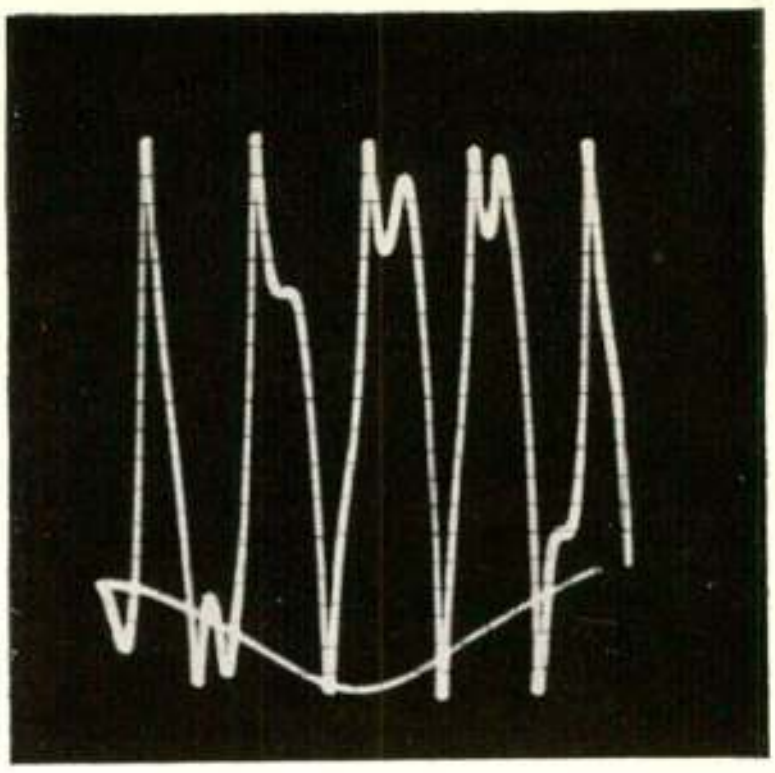
§ 15

Kiest men de waarde van p aanzienlijk groter dan 3, b.v. in de grootteorde 8 of hoger, dan treden qualitatieve verschillen op met het onder § 14 besprokene.

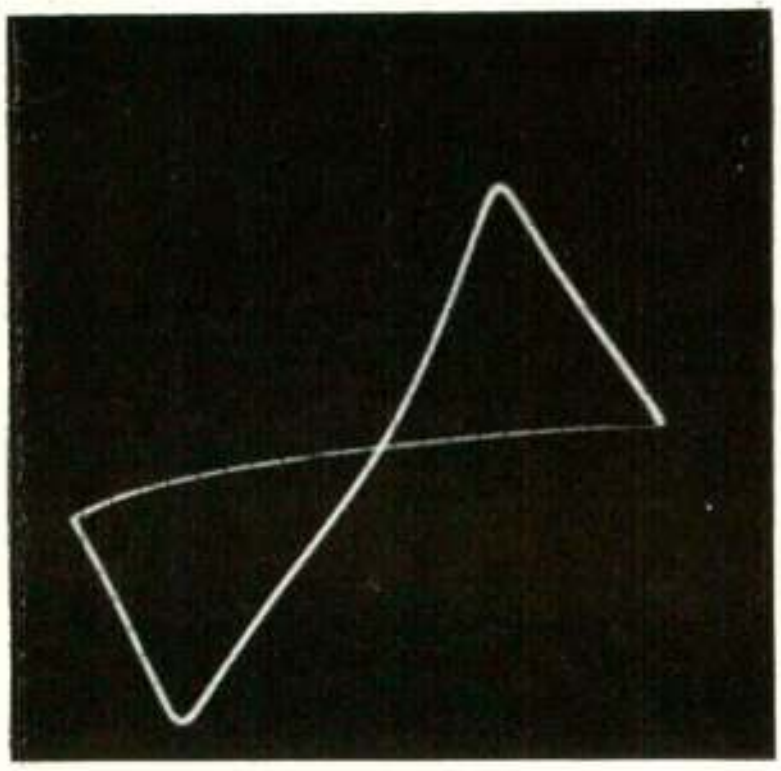
1



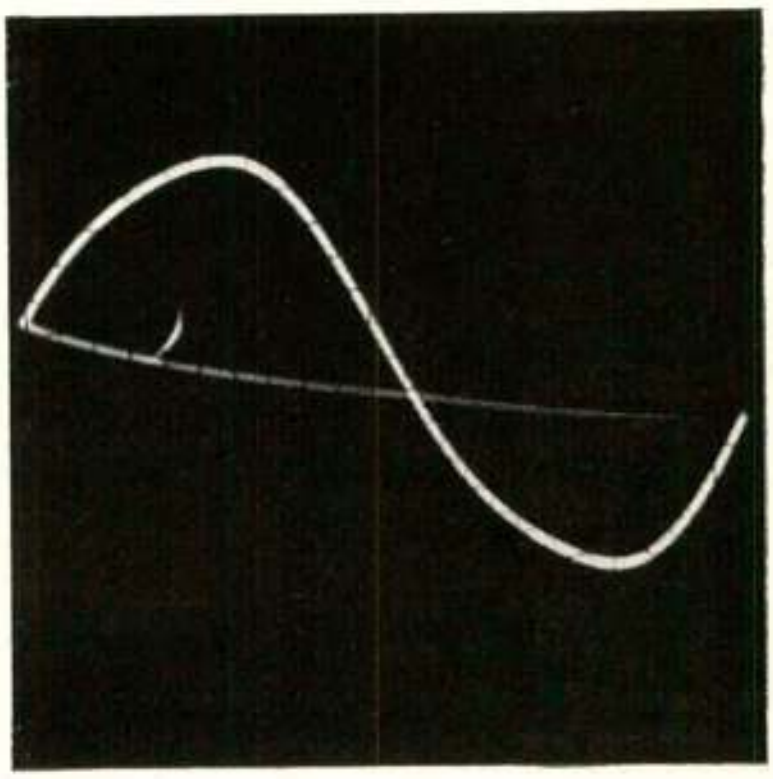
5



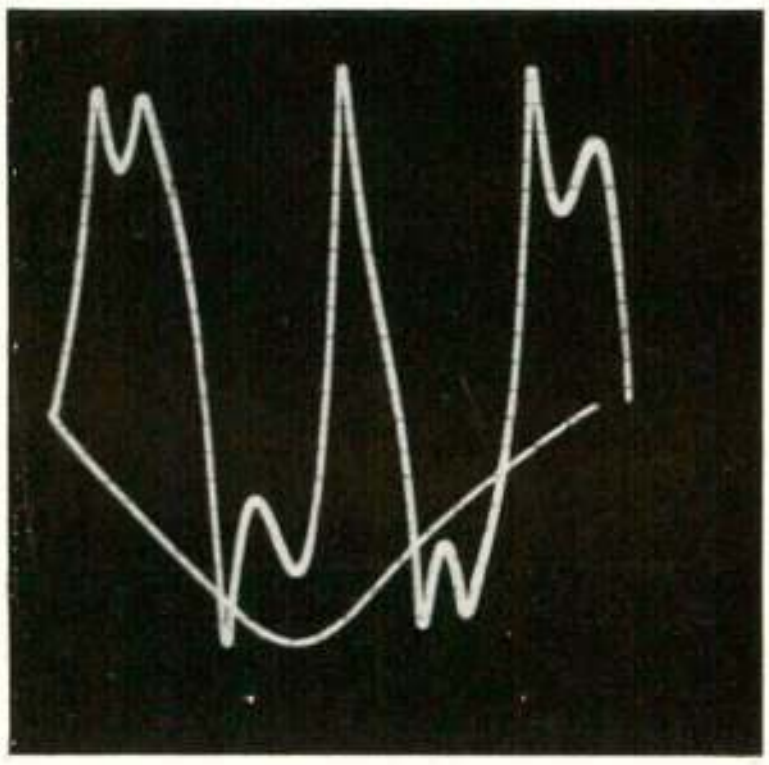
2



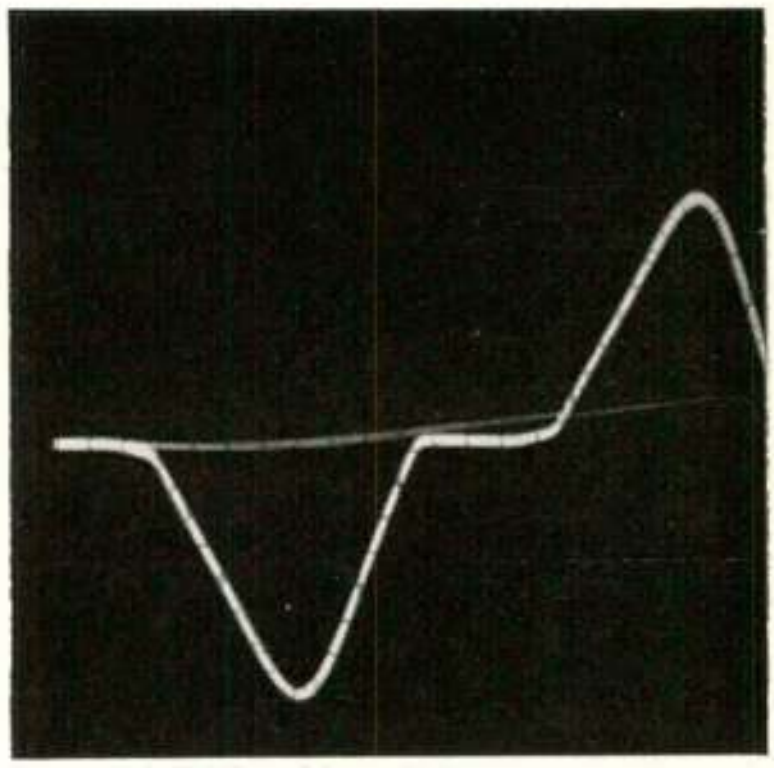
6



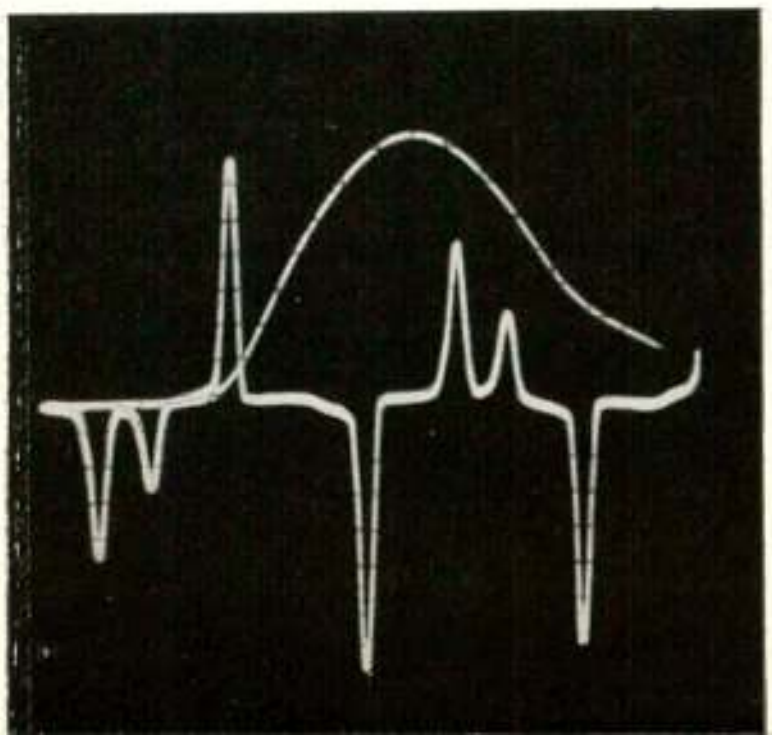
3



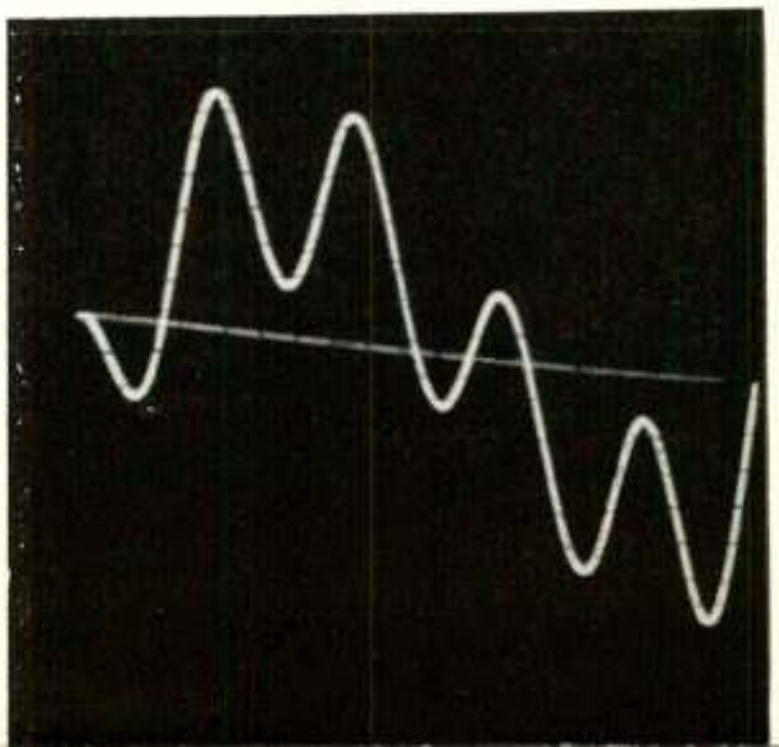
7



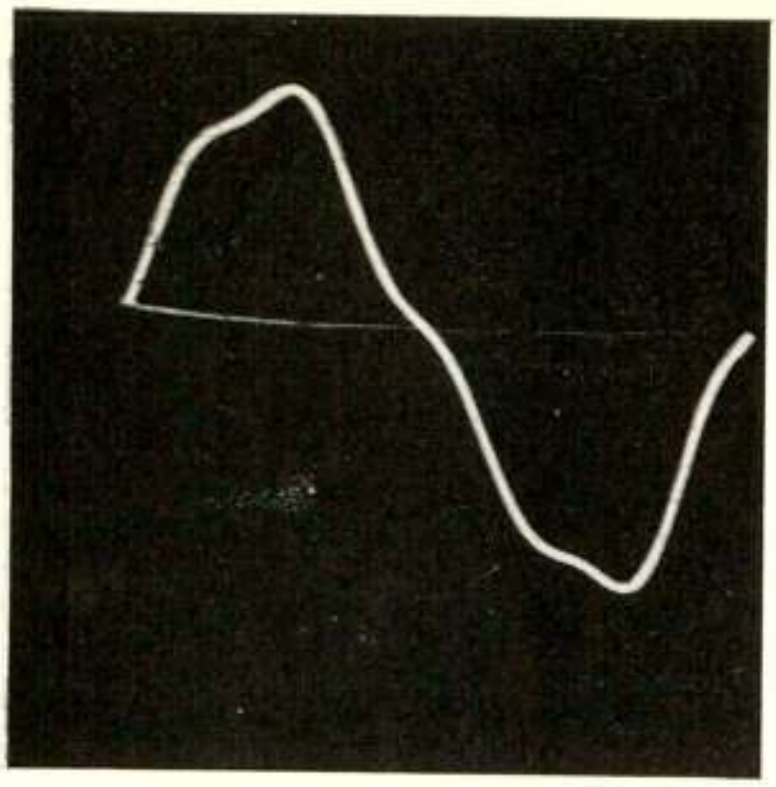
4



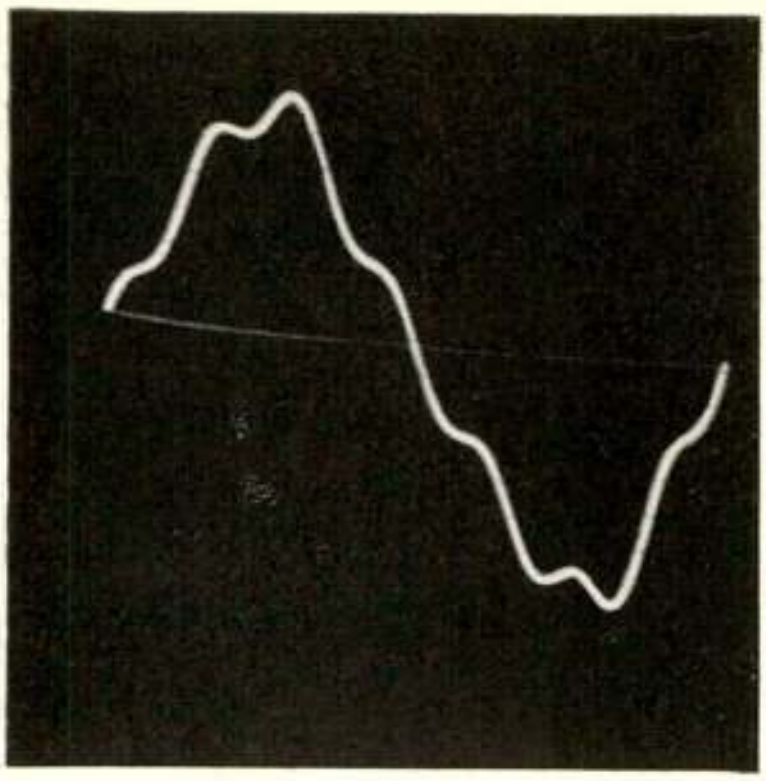
8



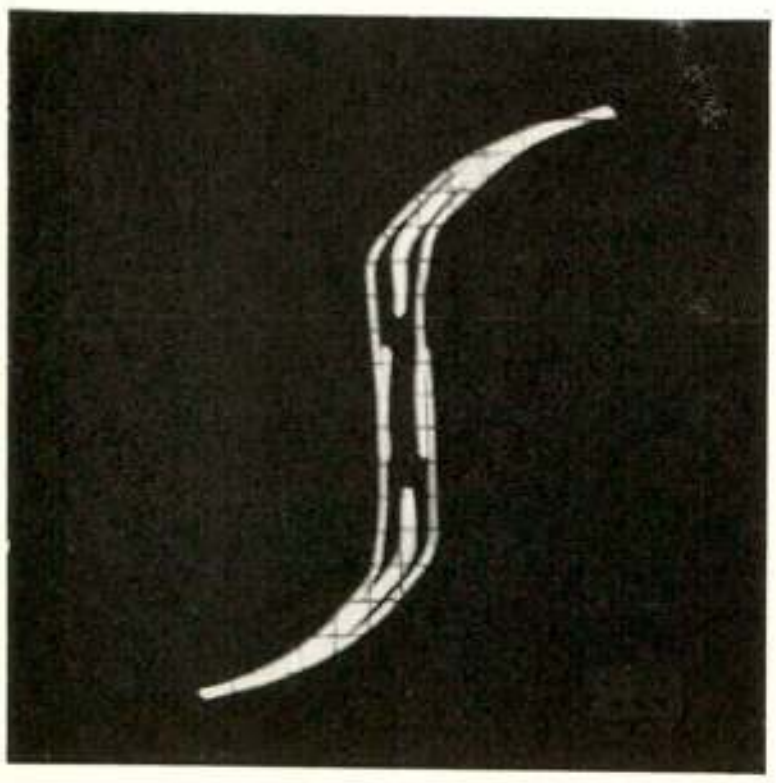
9



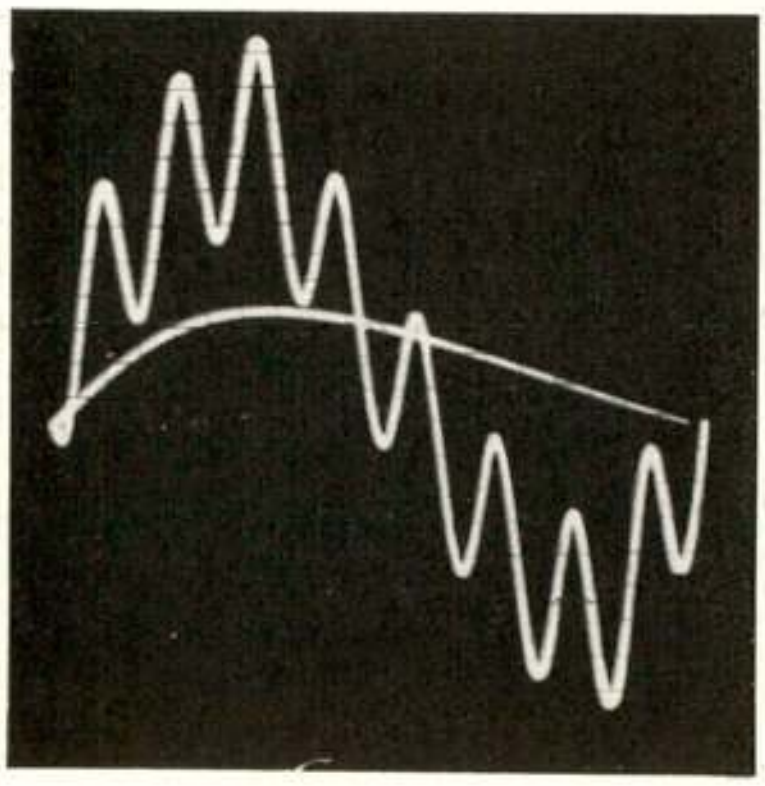
13



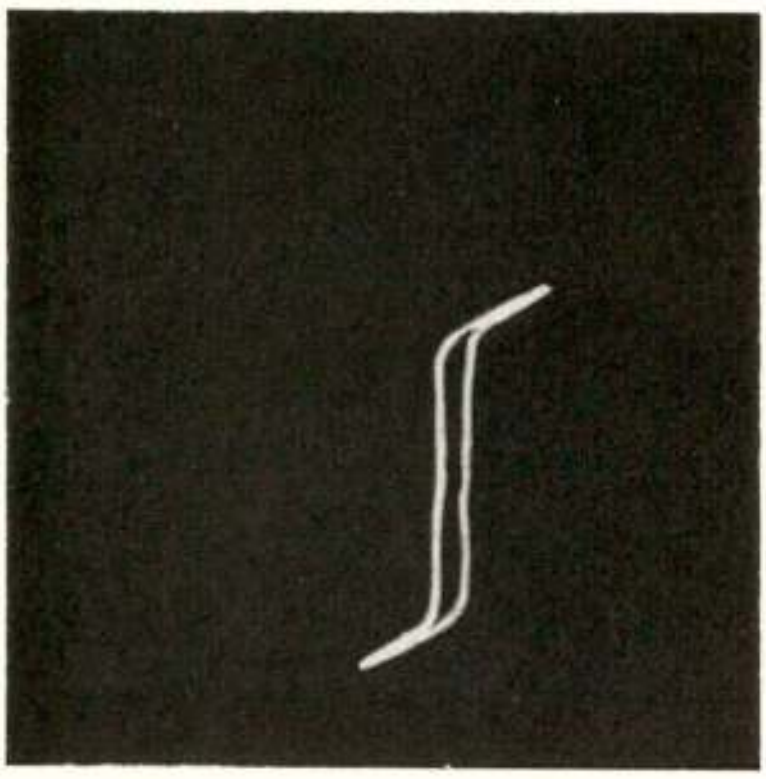
10



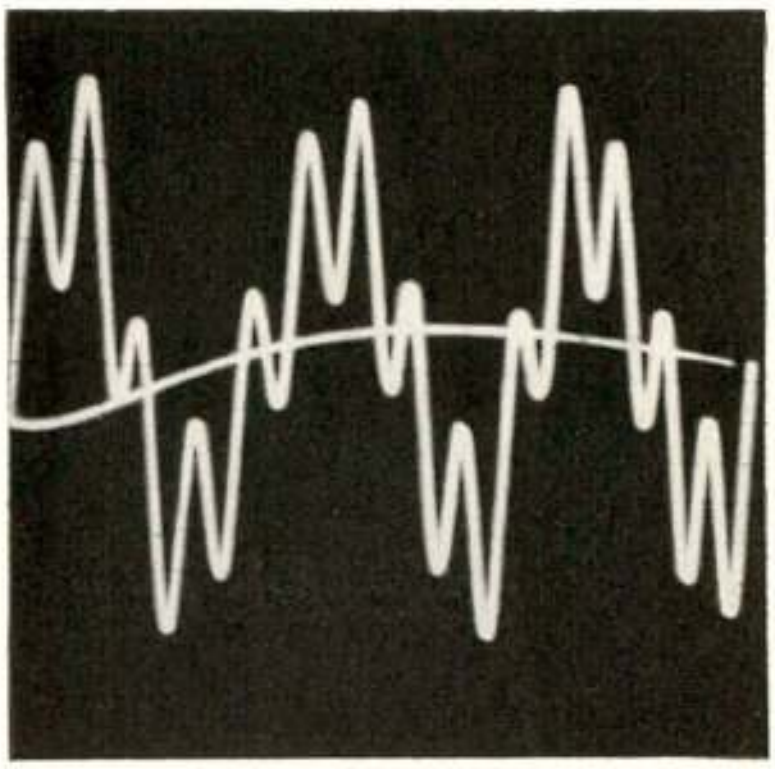
14



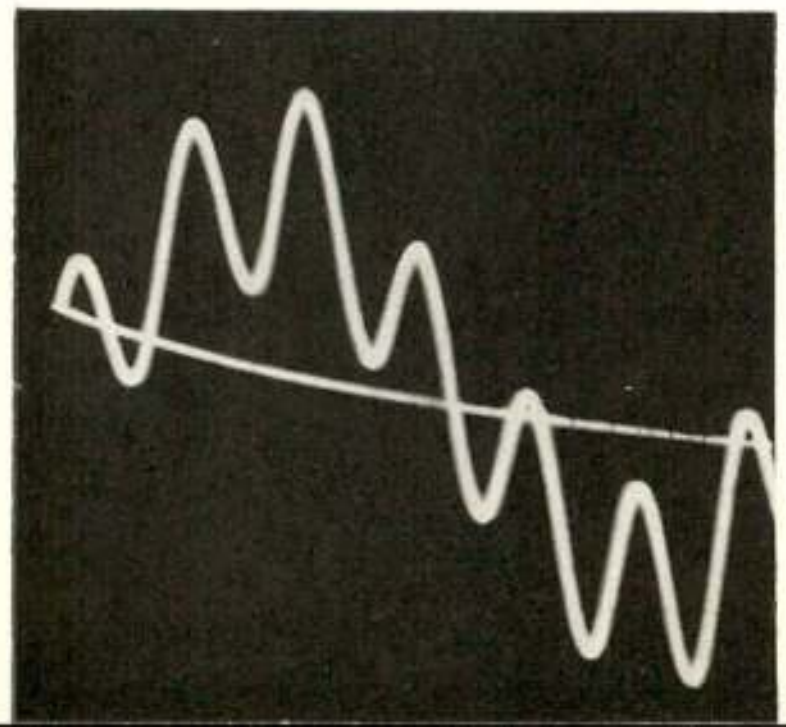
11



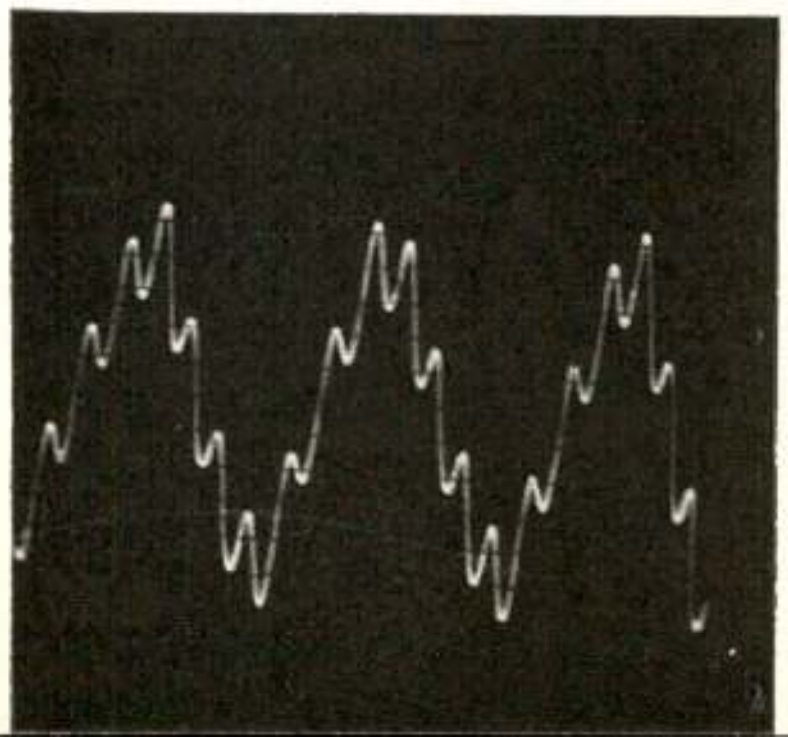
15



12



16



In de eerste plaats blijkt uit de experimenten, dat voor het verkrijgen van het kipverschijnsel een grotere amplitudo van de emk is vereist (zie (5)), zodat men zich op het moment van kippen reeds een eind in het niet-lineaire gedeelte van de karakteritiek bevindt. Verder blijkt de amplitudo van het verschijnsel na het kippen aanzienlijk te zijn toegenomen, in tegenstelling tot het vorige geval (zie osc. 1 en 2).

Een ander zeer in het oog lopend verschil is, dat men bij verder opregelen van de spanning geen instabiele gebieden meer ontmoet en daarmee evenmin subharmonischen. Wel neemt de vervorming aanzienlijk toe.

Regelt men evenwel vanuit de gekipte toestand de spanning op het circuit omlaag, dan kan het bij het terugkippen voorkomen, dat dit gebeurt in een subharmonische trillingstoestand. Ook dit is een verschil met het onder § 14 besproken geval, waar de toestand bij het terugkippen terugviel in een grondharmonische toestand. Indien de omstandigheden voor het optreden van zo een subharmonische toestand niet gunstig zijn, gaat het verschijnsel via een instabiele toestand, waarin dus fasesprongen en een verspringende grondfrequentie optreden, over in de grondharmonische toestand. Aangezien men de fase bij het terugkippen niet kan regelen, is het verwezenlijken van een bepaalde subharmonische niet reproduceerbaar, men verkrijgt nu eens de ene, dan weer een andere subharmonische.

Van dergelijke subharmonische toestanden van de flux valt op, dat ze behalve een component met de generatorfrequentie en een of twee subharmonische componenten, nagenoeg geen andere harmonische componenten bevatten. De amplitudines van deze subharmonischen zijn veelal groter dan die van de grondharmonische component.

Heeft een subharmonische toestand zich eenmaal ingezet, dan blijkt ze betrekkelijk stabiel te zijn. Men kan de amplitudo van de opgedrukte emk binnen betrekkelijk wijde grenzen variëren zonder dat het verschijnsel in de grondharmonische toestand terugvalt. Bij deze variatie van de emk ziet men wel de amplitudo van de netfrequentie-component veranderen, echter die van de subharmonische verandert slechts weinig. Het is op dergelijke wijze mogelijk, de 50-Hz component zeer klein te maken, zodat het verloop van de flux met de tijd slechts weinig vervormd is, doch een subharmonische grondfreqentie heeft.

We zullen thans enkele van deze waargenomen toestanden nader beschouwen.

In oscillogram 6 is een periode van de flux gegeven, waarbij de grondfrequentie correspondeert met de derde subharmonische. Hier was de emk zover teruggeregeld, dat de 50-Hz component nauwelijks meer te herkennen valt, zodat een weinig vervormde $16^2/_3$ Hz trilling resulteert.

Osc. 7 geeft het verloop van de stroom voor dit geval, dat echter zeer sterk vervormd is. De grondharmonische is weer de derde subharmonische.

Men vergelijke tevens de osc. 8 en 9, die beide een periode van de flux geven bij aanwezigheid van een vijfde subharmonische. De component van de netfrequentie is op de subharmonische gesuperponeerd met een veel kleinere amplitudo. De emk werd in dit geval neergeregeld van 43 V (osc. 8) tot 8 V (osc. 9), zonder dat dit veel invloed had op de amplitudo van de subharmonische.

In osc. 10 is het $\Psi - i$ verband bij aanwezigheid van een vijfde subharmonische afgebeeld. Duidelijk komt hierop tot uiting het optreden van binnenlussen, waarvan reeds in een vorig artikel gewag werd gemaakt.[1]) Hier is de 50 Hz component in de flux nog vrij aanzienlijk. Dit is evenwel niet het geval in osc. 11, dat eveneens een $\Psi - i$ kromme ingeval van een vijfde subharmonische toont. Men merkt op, dat de binnenblussen hier verdwenen zijn, wel komen in de flanken van de karakteristiek kleine onregelmatigheden voor.

De osc. 12 en 13 geven weer trillingstoestanden van de flux te zien, waarbij de component met de generatorfrequentie voor beide gevallen sterk verschilt. Thans is de grondfrequentie echter de zevende subharmonische van de netfrequentie.

In osc. 14 ziet men een periode van de flux met als componenten een negende subharmonische met aanzienlijke amplitudo en een beduidend kleinere component met de netfrequentie.

§ 16

Het zal de lezer opgevallen zijn, dat in alle tot dusver in § 15 besproken trilllingstoestanden van de flux, behalve een component van de generatorfrequentie en een bepaalde subharmonische, geen andere componenten voorkwamen. Met name geen (althans niet waarneembare) bovenharmonischen. Er is echter reeds terloops op gewezen, dat ook toestanden kunnen voorkomen voor-

[1]) zie G. J. Elias en H. Miedema, T. Ned. Radiogen. XI (1946) p 146.

komen, die twee subharmonische componenten bevatten. Zulk een toestand kan zich voordoen, indien het systeem, waarin zich tevoren reeds een toestand heeft gestabiliseerd met een bepaalde subharmonische grondfrequentie, een kleine verstoring wordt geïntroduceerd, b.v. door middel van een plotselinge, niet te grote verandering van de waarde van de capaciteit. Uitgaande van zo een subharmonische toestand, wordt tengevolge van een dergelijke verstoring, een andere subharmonische aangestoten, die, indien de omstandigheden daarvoor gunstig zijn, naast de oorspronkelijke subharmonische kan blijven voortbestaan. In zulk een geval heeft men dus naast de component met de netfrequentie, nog twee subharmonische componenten. Het blijkt nu, dat bij zo een gelegenheid, de nieuw aangestoten frequentie steeds een subharmonische is van de reeds aanwezige subharmonische. Men verkrijgt b.v. uitgaande van een vijfde subharmonische, als nieuwe component de derde subharmonische van de vijfde, derhalve een vijftiende subharmonische van de generatorfrequentie. (zie ook § 7). De amplitudo van deze nieuwe component blijft klein, maar is niettemin waarneembaar zoals uit osc. 15 duidelijk blijkt. Ogenschijnlijk ziet men hierop drie gelijke perioden van de vijfde subharmonische, doch bij nadere beschouwing valt direct op, dat elk van deze perioden verschillen ten opzichte van elkaar vertonen (men lette b.v. op de verschillen in de toppen der kromme).

Op een dergelijke wijze geeft osc. 16 een trillingstoestand te zien, waarin de amplitudo van de zevende subharmonische overheerst, doch waarin daarnaast nog de generatorfrequentie en de een en twintigste subharmonische daarvan voorkomen.

Subharmonischen van een nog hoger rangnummer zijn door ons tot dusverre nog niet waargenomen.

§ 17

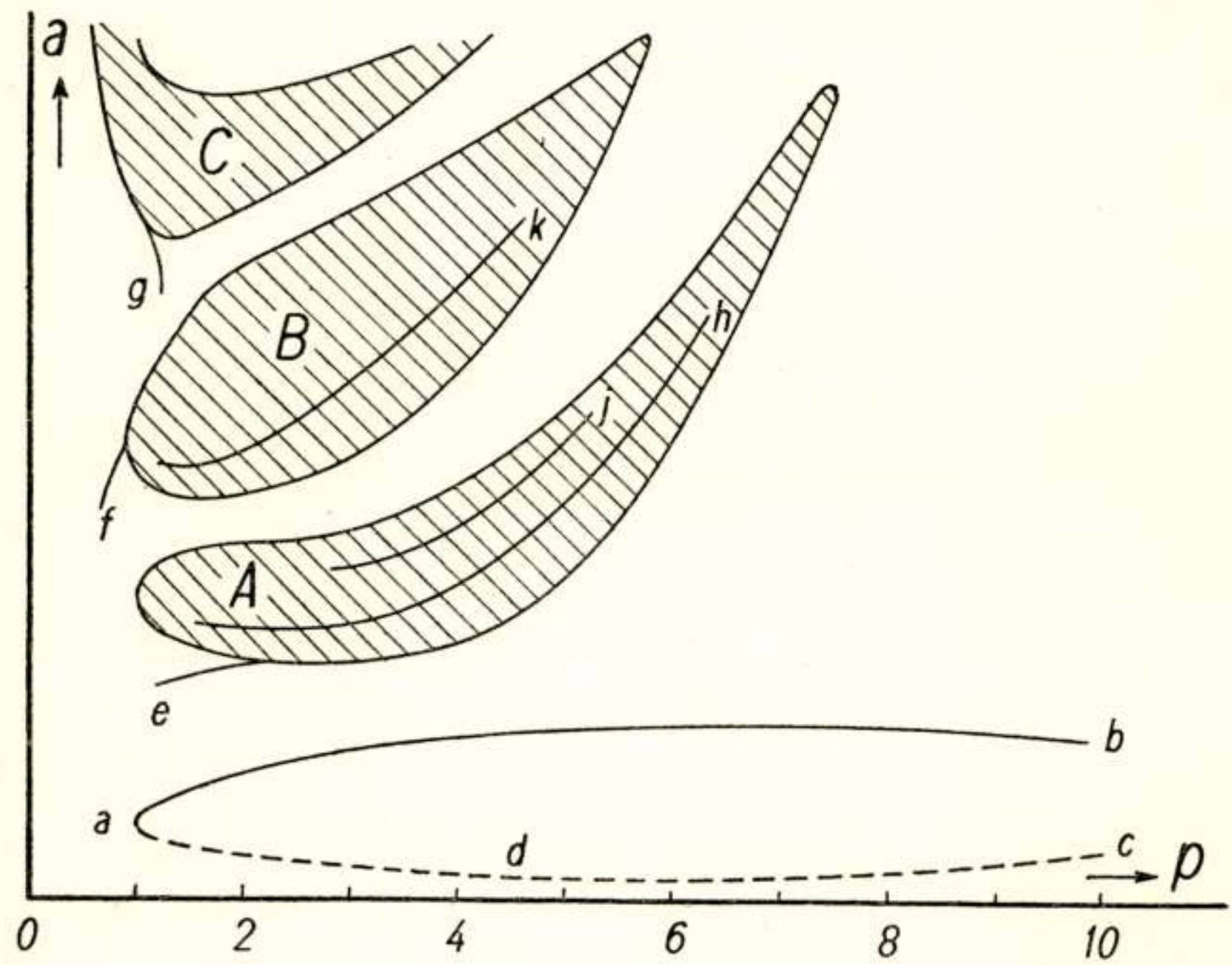
Thans willen we nog enkele opmerkingen maken over de verschijnselen, die zich voordoen, indien de grootheid p wordt gekozen tussen de voor de gevallen van de §§ 14 en 15 in gelegen waarden: b.v. $p = 5$.

Men bevindt zich dan in een overgangsgebied, waarbij subharmonischen kunnen optreden, direct na het heenkippen (wat nog bij § 14, noch bij § 15 het geval was), als bij het terugkippen (wat alleen bij § 15 voorkwam). De stabiele subharmo-

nische trillingstoestanden laten zich hier evenwel moeilijker realiseren.

Bij verdere verhoging van de emk boven de kipspanning, treden ook hier, evenals in § 14, stabiele en instabiele gebieden op. Deze liggen nu echter bij aanzienlijk hogere spanningen en kunnen dan ook niet zonder gevaar voor de spoel volledig worden vervolgd, voor waarden van p, die naderen tot die voor de in § 15 besproken gevallen.

Het is niet mogelijk, de grenzen tussen de onder §§ 14 en 15



en hierboven besproken gebieden scherp te trekken. Het gedrag van de kring, gaat van het ene gebied geleidelijk over in het andere.

Hoewel de grootheid p volkomen gedefiniëerd is volgens § 13, dient deze grootheid hier slechts ter globale classificatie der verschijnselen.

De hiervoor beschreven verschijnselen kunnen qualitatief worden samengevat in de volgende afbeelding in het a-p-vlak, dat correspondeert met het amplitudofrequentie-vlak.

Hierin zijn A, B en C de instabiele gebieden, waarvan sprake was in § 14. In deze gebieden vindt men echter lijnen, zoals

b.v. aangegeven door *h, j, k,* waarop min of meer stabiele subharmonische trillingstoestanden mogelijk zijn (osc. 3, 4, 5).

De eerste kipgrens bij continue opregeling van de emk wordt gegeven door de lijn *ab*; voor het plotseling veranderen van de krommevorm bij het passeren van deze grens, zie men de osc. 1 en 2. Hogere kipgrenzen zijn schetmatig weergegeven door de lijnen *e*, *f* en *g*.

Bij continu terugregelen van de spanning ontmoet men de terugkipgrens *adc*. Voor grotere waarden van *p* (bv. over het traject *dc*) manifecteren zich bij dit terugkippen subharmonischen, zoals werd beschreven in § 15 (osc. 6 t/m 16).

Octrooien

Openbaar gemaakt 15 Augustus 1949.

O.A. 129010, kl. 95a5. Bell Telephone. Teruggekoppelde generator voor hoge frequenties met grote stabiliteit, vooral bij veranderlijke belasting, waarbij gebruik wordt gemaakt van een brugschakeling.

O.A. 88328, kl. 95n7d. Bell Telephone. Inrichting voor overdracht van hoogfrequente electrische golven met twee antenne's, waarbij behalve de stralingsweg nog een tweede weg is aangebracht om ontkoppeling te verkrijgen.

O.A. 89251. kl. $21a^{4}52$. Western Electric Co. Stelsel voor geheimverkeer.

O.A. 130567. kl. $21a^{4}9i1$. Bell Telephone. Electronenontladingsinrichting met snelheidsbesturing, met een hulpelectronenstraal ten behoeve van de modulatie.

O.A. 106866. kl. 95b2a. N.V. Philips. Schakeling voor het in frequentie moduleren van een electrische trilling met behulp van een reactantiebuis, waarbij de inwendige capaciteiten van de reactantiebuis weinig invloed hebben op de opgewekte frequentie.

Openbaar gemaakt 15 September 1949.

O.A. 123233. kl. 21d58a. H. van Dijk. Spreidingsvrije transformator, bestaande uit twee identieke manteltransformatordelen, op elk waarvan de helft van de primaire en de helft van de secundaire wikkelingen zijn aangebracht, waarbij beide delen zo gelegen zijn dat zij elkaars spiegelbeeld vormen, met de wikkelingen coaxiaal, zodanig dat de spreidingsvelden van beide delen elkaar opheffen.

O.A. 130409. kl. 95h2b. N.V. Philips. Holleruimteresonator in de vorm van een rechthoekig prisma, waarbij de loodrechte doorsnee van het prisma een parallelogram is met een hoek van 45° en zijden met een lengteverhouding van $1 : \sqrt{2}$. Hierdoor kan een grotere kringkwaliteit worden verkregen.

He.

Openbaar gemaakt 15 October 1949.

O.A. 132506, kl. 95h3a2. N.V. Philips. Hoogfrequentspoel met regelbare zelfinductie door middel van een kern en regelstift uit hoogfrequentijzer, waarbij de zelfinductie toeneemt als de regelstift verder uit de kern wordt geschoven.

O.A. 100601, kl. 96g1b2. Sidney Young White. Radioontvangtoestel dat zich in een zeker frequentieinterval automatisch afstemt op een met een kenmerkend signaal gemoduleerde draaggolf en bovendien een identificatie van de ontvangen draaggolf geeft.

O.A. 111608, kl. 95f3. N.V. Philips. Regelschakeling, waarbij een veranderlijke regelspanning over een afvlakkend filter aan de ingangselectrode van een regelbuis wordt toegevoerd en de tijdconstante van het filter automatisch wordt gevarieerd in afhankelijkheid van de sterkte der regelspanning.

O.A. 134451, kl. 95d2b2a. Bell Telephone. Balansversterker, geschikt voor een zeer breed frequentiegebied, waarbij symmetrieafwijkingen automatisch gecompenseerd worden.

O.A. 129154, kl. 95c2. N.V. Philips. Schakeling voor het ontvangen van in frequentie gemoduleerde trillingen, waarbij een eventueel optredende amplitudemodulatie wordt onderdrukt.

O.A. 123207, kl. 21g13c5. N.V. Philips. Inrichting, bevattende een electronenbuis met een door veldemissie emitterende kathode en met een dalende stuurroosterspanningsanodestroomkarakteristiek.

Openbaar gemaakt 15 November 1949.

O.A. 129790, kl. 95c2. N.V. Philips. Detectorschakeling voor het detecteren van in frequentie gemoduleerde trillingen met behulp van een meerroosterbuis met tenminste twee stuurroosters.

O.A. 120690. kl. 21a^{4}35d. N.V. Philips. Inrichting voor de gloeidraadvoeding van een roosterbestuurde ontladingsbuis met direct verhitte gloeidraad en een voedingsbron met relatief hoge inwendige weerstand, waarbij op deze bron een trillergelijkrichter is aangesloten en waarbij een brugschakeling is toegepast, zodat storingen van de trillergelijkrichter niet kunnen doordringen in de gloeidraad.

He.

Boekbespreking

R. A. Smith: *Aerials for metre and decimetre wavelenghts.* — Cambridge University press. 1949. 218 blz. *f* 12.—. Importeurs: Meulenhoff en Co. N.V.

Dit boek is een deel uit de serie „Modern Radio Technique", welke onder redactie van J. A. Ratcliffe bij dezelfde uitgever verschijnt. In dit boek worden problemen en toepassingen behandeld van zend- en ontvangantennes in het golflengte gebied van 12 meter tot 10 cm.

De schrijver heeft hierbij het midden gehouden tussen de theorie en de practijk van deze antennes. Hierdoor zal dit boek door een grote lezersgroep gewaardeerd kunnen worden, doch voor nadere bestudering der onderwerpen is de lezer op diepergaande literatuur aangewezen.

De schrijver heeft echter dit bezwaar ondervangen door aan het einde van elk hoofdstuk een literatuurverwijzing op te nemen. Daar, waar de schrijver voornamelijk de uitkomsten van bepaalde theorieën geeft, verzuimt hij niet, om op duidelijke wijze aan te geven onder welke aanname en langs welke weg deze uitkomsten verkregen zijn.

Van de lezer wordt voor de meer theoretische hoofdstukken een wiskunde kennis verwacht, zoals die aan de M.T.S. onderwezen wordt.

Volgt nu hier een kort begrip van de inhoud; na een korte behandeling van resonerende dipolen en dipoolgroepen gaat de schrijver over op de elementaire antenne-theorie, de stralingstheorie van lineaire antennes (waarin o.a. methoden van Hallen, Schelkunoff, Chu en Stratton) en de theorie van parasitaire stralers.

Dan volgt het meer practische gedeelte van het boek, waarin onder meer behandeld worden: zendantennes voor grote vermogens, ontvangantennes, lineaire antennes van meerdere golflengten met staande en lopende golven, dipoolvlakken voor 1,5 m radar, het schakelen van de antennebundel, draaiende koppelingen, vliegtuigantennes, en tot slot een beschouwing over het optreden van ruis in antennes.

Dit boek is vooral aan te bevelen voor hen, die zich op het gebied van kortegolf-antennes wensen te oriënteren, omdat de schrijver vele onderwerpen hieruit behandelt en deze ook helder weet te belichten.

De uitvoering is goed verzorgd, de opgenomen tekeningen zijn duidelijk en sluiten goed bij de tekst aan.

J. V.

Radiotelegrafie en -Telefonie. Leerboek, behandelende de grondbeginselen van de radiotechniek, in het bizonder voor hen, die zich wensen te bekwamen tot scheepsradiotelegrafist, door F. P. Roest. Vierde druk, uitgegeven door N.V. Uitgeversmaatschappij AE. E. Kluwer, 312 pag. en 275 figuren. Prijs *f* 12.50.

Dit boek, dat bedoeld is voor aanstaande scheepsradiotelegrafisten, beleeft thans zijn vierde druk. Dit is wel een bewijs dat het in een behoefte voorziet. Het is geen gemakkelijke taak om een goed boek te schrijven over de radiotechniek voor een lezer van wie slechts een oppervlakkige kennis van de grondbeginselen der wis- en natuurkunde mag worden verwacht. De schrijver is er in geslaagd, dank zij zijn ervaring als leraar aan een zeevaartschool, een leerboek samen te stellen dat kan worden aanbevolen voor allen die zich van de grondbeginselen der radiotechniek op de hoogte willen stellen.

Wanneer men het boek doorbladert, valt onmiddellijk op, dat er weinig formules zijn gebruikt; bij het doorlezen blijkt dat de auteur er steeds naar heeft gestreefd een duidelijk beeld te geven van de principes waarop de radiotechniek berust, en slechts daar de wiskunde te hulp heeft geroepen waar dit strikt nodig was. Hierdoor is bereikt dat de beginneling er niet in verdrinkt en dat bovendien de meer gevorderde zijn inzicht er mee kan verdiepen.

Soms blijkt het lastig te zijn om geheel zonder gebruikmaking van de differentiaalrekening en van de complexe rekenwijze electromagnetische verschijnselen te verklaren. In zulk een geval had dan de schrijver wellicht ook beter gedaan door er maar wat minder over te zeggen. Tegen een vereenvoudigde voorstelling behoeft geen bezwaar te bestaan, doch wanneer dit leidt tot begripsverwarring, moet hiertegen toch ernstig worden gewaarschuwd.

Zo wordt b.v. op blz. 59 getracht het huideffect aannemelijk te maken. De oorzaak van dit effect wordt toegeschreven aan het magnetische wisselveld binnen in de geleider. Verder wordt gezegd dat de richting van de stroom in het midden van een cylindervormige draad wel eens tegengesteld kan zijn aan die van de stroom aan de omtrek. De conclusie welke hieruit wordt getrokken, luidt dan dat de hoogfrequent weerstand kleiner kan worden door het wegnemen van de kern van de draad. Een koperen buis zou dientengevolge voor hoge frequenties een lagere weerstand kunnen hebben dan een massieve staaf van

dezelfde diameter. Een dergelijke redenering is wel wat al te simplistisch en niet bevorderlijk voor de vorming van een juist begrip.
Op blz. 8 is § 7 gewijd aan de decibell. De daar gegeven definitie van de bell is niet juist. Het gaat niet om de verhouding van twee hoeveelheden energie, doch om die van twee vermogens. Evenmin is het juist om te spreken van een energietoename van 1 dB. Ook maakt het een slordige indruk wanneer men spreekt van een energie van 10 mW (bovenaan blz. 8). Op blz. 62 wordt bij de behandeling van condensatoren een opmerking gemaakt waarvan ons de zin ontgaat. Daar wordt n.l. gezegd, dat bij onvolkomen isolatie van condensatoren het percentage van de energie dat per periode door lekkage verloren gaat, afhankelijk is van de frequentie en dat dit bij lage frequenties het grootst is.

Bij de afleiding van de uitdrukking voor de versterking van een laagfrequentversterker (blz. 127) wordt een o.i. gekunstelde redenering gevolgd. Formule (45) zegt dat $I_a = S(V_g + \frac{1}{g} V_a)$, terwijl in (46) staat dat $I_a = S(V_g - \frac{1}{g} V_a$ Hierin heeft V_a een andere betekenis dan in (45). Het gevaar dat hier verwarring gesticht wordt is niet denkbeeldig.

Deze punten van critiek moeten worden beschouwd als een keuze van de belangrijkste uit een aantal dat bij een tamelijk vluchtige doorlezing naar voren kwam.

Zoals reeds boven werd opgemerkt, heeft het boek toch zovele goede kwaliteiten, dat, ondanks het feit, dat er hier en daar wel wat op valt aan te merken, wij met een gerust hart de bestudering ervan kunnen aanbevelen.

De uitgave is zeer verzorgd, doch wij betreuren het dat de prijs van dit werk zo hoog moest worden gesteld.

P. H. B.

Ontvangen Tijdschriften enz.

Journal of the Franklin Institute, Oct. 1949.
Wireless Engineer, Sept., Oct., Nov. 1949.
Nat. Bureau of Standards, Basic Radio Predictions for Jan., Febr. 1950.
Technical News Bulletin Vol 33, Aug.-Sept., Nrs. 8, 9, 10, 1949.
Ericsson Review, nr. 2, 1949.
Annales des Telecommunication, Tome 4. Nrs 7, 8, 9, 1949.
Proc. Cambridge, Phil. Soc. Vol. 45 Nr 4, 1949.
Electrical Communication, Juni 1949.
Proc. First Meeting of the Mixed Comm. on Ionosphere. Uitgave Intern. Counsil of Scientific Unions.
Brown Boveri Mitteilungen, Sonderheft Sende- und Gleichrichterröhren, Sept. 1949.
Radio Revue, Oct.-Dec., 1949.
De Ingenieur, Jrg. 61, Nrs 40—47.
Tijdschrift voor Radiotechniek, Jrg. 3, Nrs 9—10.

Mededelingen

URSI-CONGRES 1950

De algemeen-secretaris van de U.R.S.I. deelt mede, dat het 9e congres, in 1950 te houden in Zürich, is vastgesteld in de periode 11-23 September.

Tegelijkertijd zijn (in 12-voud) aanbevelingen en richtlijnen toegestuurd voor hen, die zich voorstellen daarvoor mededelingen in te zenden. Eén daarvan is, dat in afwijking met vorige congressen, de bijdragen zowel in het Engels als in het Frans moeten worden aangeboden (van beide in 3-voud) langs de bekende kanalen.

Een exemplaar van deze richtlijnen wordt, na aanvraag bij de secretaris N.R.G., aan belanghebbenden toegezonden.

Errata.

A. H. de Voogt.

The analysis of ionospheric reflections.

November 1948.

blz. 184: The Appleton-Hartree-formula to read:

$$M^2 = \left(\mu - \frac{jkc}{P}\right)^2 = 1 + \frac{2}{2(\alpha + j\beta) - \frac{\gamma_T^2}{1 + \alpha + j\beta} \pm \sqrt{\frac{\gamma_T^4}{(1 + \alpha + j\beta)^2} + 4\gamma_L^2}}$$

blz. 185: to read:

$$\gamma_H = \frac{p p_H}{p_0^2}$$

$$\gamma_T = \frac{p p_T}{p_0^2}$$

blz. 186: to read:

$$U = \frac{C}{\mu + f\frac{d\mu}{df}}$$

blz. 190, 191, 192 to read:

$$\frac{U}{c} \text{ and } N \times 10^{-5}$$

blz. 193: with x and y representing the same values as in the complete formula for μ mentioned above.

Errata

A. H. de Voogt.
The analysis of ionospheric reflections.
November 1948.

pag. 185 : $a = \frac{p^2}{p_o^2}$ to read : $a = -\frac{p^2}{p_o^2}$.

" 185 : "complicated from" to read : "complicated form".

" 185 : Before righthand part of equation for μ, a factor : $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ has been omitted.

" 185 : the formula for $B = [2\beta(1 + 2a) \pm \gamma]$ to read : $B = [2\beta(1 + 2a) \pm y]$.

" 186 : Before righthand part of equation for $\frac{KC}{p}$ a factor : $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ has been omitted.

" 193 : $\frac{H_x}{jH_y} = \frac{dE_y}{E_x}$ to read : $\frac{H_x}{jH_y} = \frac{jE_y}{E_x}$.

" 193 : "Where H_e, H_y, E_e" etc., to read : "Where H_x, H_y, E_x and E_y are the electric and magnetic fields etc.

" 193 : to read : $F = \frac{\gamma_T^2(1 + a) \pm \{x(1 + a) + y\beta\}}{2\gamma_L\{(1 + a)^2 + \beta^2\}}$

and : $G = \frac{\pm\{y(1 + a) - x\beta\} - \gamma_T^2\beta}{2\gamma_L\{(1 + a)^2 + \beta^2\}}$

" 195 : "Dr Mary Taylor. The Appleton-Harkee-formula" to read : "The Appleton-Hartree formula".

Note : The curves are calculated for the correct values.