Tijdschrift van het Nederlandsch Radiogenootschap

Januari 1950 **Deel XV No. 1**

Over de harmonischen van smoorspoelen en transformatoren met een ijzer-kern.

door W. H. van Zoest

Voordracht gehouden voor het Nederlandsch Radiogenootschap op 20 October 1949

SUMMARY

A theoretical and practical inquiry has been made into the linear and non-linear behaviour of the impedance of coils with laminated core.

The results are used for the design of transformers and chokes.

A. *Gedrag van de smoorspoel als lineair element.*

Nagegaan wordt het theoretisch verloop van de impedantie $\bar{z}$ van een smoorspoel waarbij de kern bestaat uit gelamelleerde blikken.

Veronderstellen we voor dit materiaal een constante permeabiliteit μ en verwaarlozen we de hysteresis-verliezen dan ontstaat voor de impedantie $\bar{z}$ de volgende uitdrukking:

$$\bar{z} = \omega L_0 \left[\frac{(\sinh k - \sin k) + j (\sinh k + \sin k)}{k (\cosh k + \cos k)} \right]$$

$$= \omega L_0 \left[F_1 (k) + j F_2 (k) \right]$$

Hierin is L_0 de waarde van de coëfficiënt van zelfinductie voor zeer lage frequenties:

$$k = 2 \pi d \sqrt{\frac{\mu f}{\varrho}}, \text{ waarin}$$

d = blikdikte

μ = permeabiliteit

f = frequentie

ϱ = soortgelijke weerstand van het blik.

Wordt deze uitdrukking nader onderzocht dan blijkt voor lage frequenties de impedantie voorgesteld te kunnen worden door de parallelschakeling van een constante weerstand en een zuivere zelfinductie.

Dit verloop geldt ongeveer tot frequenties overeenkomend met $k \approx 3$.

Voor frequenties waarbij $k \geqq 4$ kan de impedantie worden voorgesteld door de parallelschakeling van een weerstand R die evenredig met $\sqrt{\omega}$ toeneemt, dus $R = R_0 \sqrt{\omega}$, en een reactantie X, waarvan de absolute waarde gelijk is aan R. De hoek van deze impedantie is dus 45°.

Nagegaan wordt het verloop van de lineaire karakteristiek van een transformator met een gelamelleerde kern met de bovengenoemde eigenschappen.

Ligt het laagst over te brengen frequentie-gebied in de omgeving van $k \overline{\gtrless} 1{,}5$ dan ontstaat een karakteristiek die het vlakke deel snel nadert; ligt dit gebied in de omgeving van $k \geqq 3{,}5$ dan ontstaat een karakteristiek met een langzaam verloop naar het vlakke deel.

Bij metingen aan praktisch voorkomend kernmateriaal blijkt dat voor de lagere frequenties de hysteresis-verliezen een niet te verwaarlozen rol spelen.

Dit uit zich o.a. doordat de gemeten waarde van de impedanties afhankelijk van de waarde van de aangelegde spanning is.

In fig. 6) is aangegeven het verloop van $\bar{z}$, gemeten aan een kern μ-metaal. Met behulp van deze gegevens wordt het ontwerp van een transformator-kern tot enkele eenvoudige berekeningen teruggebracht.

Indien de ijzerkern van een luchtspleet wordt voorzien kan dit op eenvoudige wijze in aanmerking worden genomen in het vervangingsschema. Met behulp hiervan kan op overzichtelijke wijze de invloed van de grootte van de luchtspleet worden nagegaan.

De volledige tekst van dit deel van de voordracht is reeds gepubliceerd in „het PTT-bedrijf", Vol I, No. 2, bl. 42.

B. *Gedrag van de smoorspoel als niet lineair element.*

Indien voor het kernmateriaal van smoorspoelen en transformatoren ferromagnetisch materiaal wordt toegepast met een niet-lineaire BH-karakteristiek, kunnen bij belasting met sinus-

vormige spanningen harmonische spanningen en stromen ontstaan.

In die gevallen, waarbij het percentage harmonischen van groot belang is voor het gedrag van de schakeling is het noodzakelijk, over gegevens te beschikken waaruit dit gedrag van te voren kan worden voorspeld.

Voor kleine niet-lineaire vervormingen (van enkele percenten) is een theorie opgezet over de hierbij optredende verschijnselen.

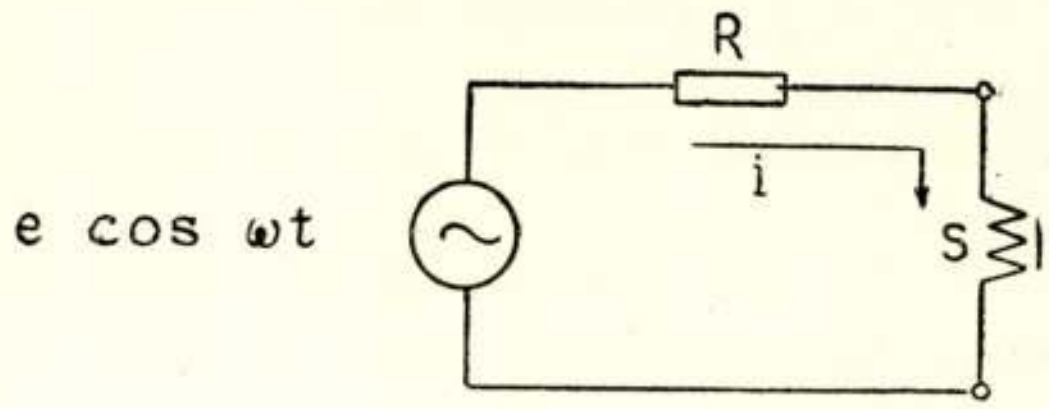

Fig. 1.
Wisselstroombron belast met een niet-lineaire smoorspoel.

Uit de conclusie zal blijken, dat door enkele eenvoudige metingen en de toepassing van lineaire wetmatigheden een duidelijk inzicht in deze verschijnselen kan worden verkregen.

In fig. 1 is een wisselstroombron met inwendige weerstand R getekend, die belast is met een smoorspoel S. Het niet-lineaire karakter van deze smoorspoel kan worden weergegeven door:

$$\psi = Li - bi^3 \qquad (1)$$

(zie fig. 2).

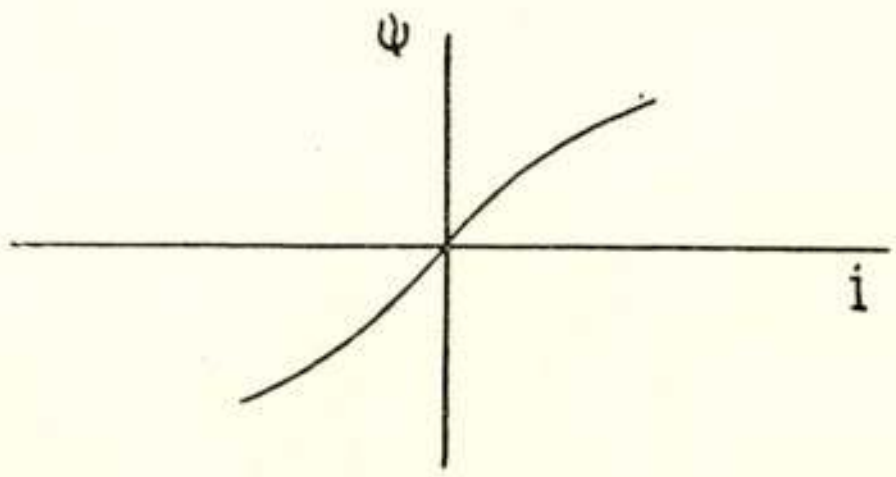

Fig. 2.
ψ-i-karakteristiek van de niet-lineaire smoorspoel.

Hierin is ψ de omvatte flux, L de coëfficient van zelfinductie d.i. $\frac{\psi}{i}$ voor kleine waarden van i en b, een constante, die het niet-lineaire gedrag bepaalt.

(Er wordt voorlopig geen rekening gehouden met de hysteresis).

De vergelijking van het circuit wordt nu:

$$e \cos \omega t = iR + \frac{d\psi}{dt} \tag{2}$$

Bezien we alleen de quasie-stationaire toestand, dan kan een oplossing worden verwacht van de gedaante:

$$i = i_1 \cos(\omega t - \alpha) + i_3 \cos(3\,\omega t - \beta) \tag{3}$$

Substitutie in ψ levert op:

$$\psi = L\{i_1 \cos(\omega t - \alpha) + i_3 \cos(3\,\omega t - \beta)\} - \\ - b\{i_1 \cos(\omega t - \alpha) + i_3 \cos(3\,\omega t - \beta)\}^3 \tag{4}$$

Ontwikkeling van $\{i_1 \cos(\omega t - \alpha) + i_3 \cos(3\,\omega t - \beta)\}^3$ geeft:

$$\frac{i_1^3}{4}\left\{\cos 3(\omega t - \alpha) + 3\cos(\omega t - \alpha)\right\} +$$

$$+ 3\,i_1^2\,i_3\{\tfrac{1}{2}\cos(3\,\omega t - \beta) + \tfrac{1}{4}\cos(5\,\omega t - 2\,\alpha - \beta) + \tfrac{1}{4}\cos(\omega t - \beta + 2\,\alpha)\} +$$

$$+ 3\,i_1\,i_3^2\{\tfrac{1}{2}\cos(\omega t - \alpha) + \tfrac{1}{4}\cos(7\,\omega t - 2\,\beta - \alpha) + \tfrac{1}{4}\cos(5\,\omega t - 2\,\beta + \alpha)\} +$$

$$+ \frac{i_3^3}{4}\left\{\cos(9\,\omega t - 3\,\beta) + 3\cos(3\,\omega t - \beta)\right\}$$

of

$$-b\,i^3 = -b\{A\cos(\omega t - \varphi_1) + B\cos(3\,\omega t - \varphi_3) + C\cos(5\,\omega t - \varphi_5) + \\ + D\cos(7\,\omega t - \varphi_7) + E\cos(9\,\omega t - \varphi_9)\}$$

dan wordt

$$\frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt} - \frac{d}{dt}(b\,i^3)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -L\left\{+\omega\,i_1 \sin(\omega t - \alpha) + 3\,\omega\,i_3 \sin(3\,\omega t - \beta)\right\} +$$

$$+ b\{\omega\,A\sin(\omega t - \varphi_1) + 3\,\omega\,B\sin(3\,\omega t - \varphi_3) +$$

$$+ 5\,\omega\,C\sin(5\,\omega t - \varphi_5) + 7\,\omega\,D\sin(7\,\omega t - \varphi_7) +$$

$$+ 9\,\omega\,E\sin(9\,\omega t - \varphi_9)\} \tag{5}$$

substitutie in (2) geeft nu:

$$e\cos\omega t = R\{i_1\cos(\omega t - \alpha) + i_3\cos(3\,\omega t - \beta)\} -$$

$$- L \{\omega i_1 \sin(\omega t - \alpha) + 3 \omega i_3 \sin(3 \omega t - \beta)\} +$$

$$+ b\{A \omega \sin(\omega t - \varphi_1) + 3 \omega B \sin(3 \omega t - \varphi_3) +$$

$$+ 5 \omega C \sin(5 \omega t - \varphi_5) + - - - \} \qquad (6)$$

We nemen nu aan, dat de afwijkingen van de lineariteit gering zijn. Hierdoor kan de bijdrage $b A \omega$ van de 1° harmonische verwaarloosd worden t.o.v. de andere termen.

Dit betekent met andere woorden, dat de lineaire oplossing niet wordt beinvloed door het optreden van harmonischen.

Vergelijking (6) splitst zich dan in 2 delen en wel:

$$e \cos \omega t = i_1 R \cos(\omega t - \alpha) - i_1 \omega L \sin(\omega t - \alpha) \qquad (7)$$

en

$$0 = R i_3 \cos(3 \omega t - \beta) - 3 \omega L i_3 \sin(3 \omega t - \beta) +$$

$$+ b\{3 \omega B \sin(3 \omega t - \varphi_3) + 5 \omega C \sin(5 \omega t - \varphi_5) + - -\} \qquad (8)$$

Vergelijking (7) geeft de bekende oplossing:

$$i_1 = \frac{e \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ met } tg\, \alpha = \frac{\omega L}{R} \qquad (9)$$

Bezien we van (8) alleen de termen met het argument $3 \omega t$, dan kunnen we hiervoor schrijven:

$$0 = R i_3 \cos(3 \omega t - \beta) - 3 \omega L i_3 \sin(3 \omega t - \beta) +$$

$$+ 3 \omega b \left\{ \frac{i_1^3}{4} \sin 3(\omega t - \alpha) + \frac{3}{2} i_1^2 i_3 \sin 3(\omega t - \beta) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} i_3^3 \sin(3 \omega t \beta) \right\} \qquad (10)$$

Aannemende dat $i_3 << i_1$ kunnen van de uitdrukking tussen accoladen van (10) de laatste twee termen worden verwaarloosd, waardoor (10) overgaat in de uitdrukking (11).

$$- \frac{3}{4} b \omega i_1^3 \sin 3(\omega t - \alpha) = i_3 R \cos(3 \omega t - \beta) - 3 \omega L i_3 \sin(3 \omega t - \beta)$$

of

$$+ \frac{3}{4} b \omega i_1^3 \cos\left\{3(\omega t - \alpha) + \frac{\pi}{2}\right\} = i_3 R \cos(3 \omega t - \beta) -$$

$$- 3 \omega L i_3 \sin(3 \omega t - \beta) \qquad (11)$$

Deze uitdrukking, die dezelfde gedaante heeft als (7) geeft een analoge oplossing:

$$i_3 = \frac{\frac{3}{4}\, b\, \omega\, i_1^3 \cos(3\,\omega t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + (3\,\omega L)^2}} \tag{12}$$

De 3° harmonische klemspanning aan R en dus ook aan de spoel bedraagt:

$$u_3 = i_3 R = \frac{\frac{3}{4}\, b\, \omega\, i_1^3 R \cos(3\,\omega t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + (3\,\omega L)^2}}$$

$$\frac{e_3 R \cos(3\,\omega t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + (3\,\omega L)^2}} \tag{13}$$

Hierin is e_3 een fictieve 3° harmonische emk. Voor vergelijking (13) kan het volgende vervangingsschema worden getekend (zie

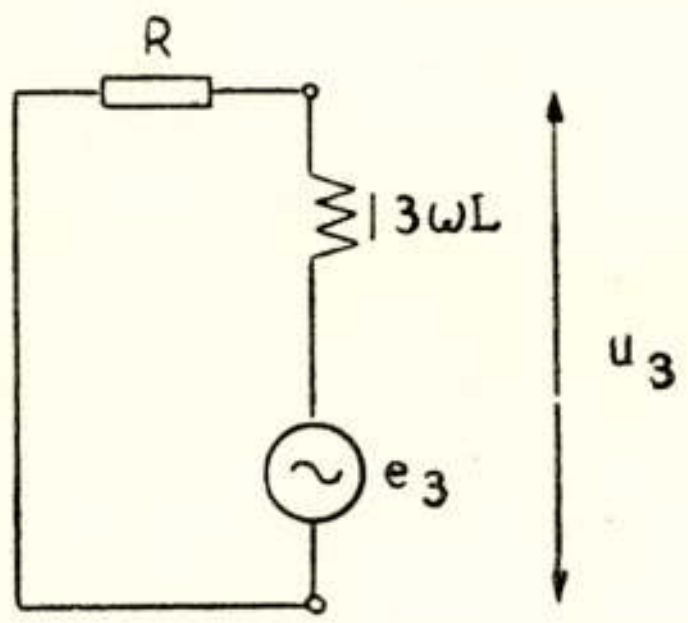

Fig. 3.
Vervangingsschema voor de derde harmonische.

fig. 3). In woorden: derde harmonische stromen en daarmede samenhangende klemspanningen kunnen worden voorgesteld in een lineair schema. In dit schema stelt e_3 de nullastspanning voor van de 3° harmonische.

Voor de inwendige weerstand (impedantie) moeten worden gerekend met de impedantie van de smoorspoel voor de drievoudige frequentie. Deze formulering kan nog worden uitgebreid voor het geval R niet constant is, maar door een frequentieafhankelijke impedantie Z kan worden voorgesteld. Voor dit geval dient voor de 3° harmonische stroom de waarde van Z bij 3-voudige frequentie te worden genomen. Het is duidelijk dat dezelfde gedachtengang gevolgd kan worden voor de bepaling van andere harmonischen.

Voor het uitrekenen van het werkelijke percentage harmonischen is nodig dat e_3 als functie van i_1 bekend is.

Deze afhankelijkheid kan voor een bepaalde ijzersoort het gemakkelijkst worden gemeten met behulp van de schakeling volgens fig. 4. Gezonden wordt met een zuivere frequentie ω, via een hoge weerstand R, waardoor met de analysator zonder

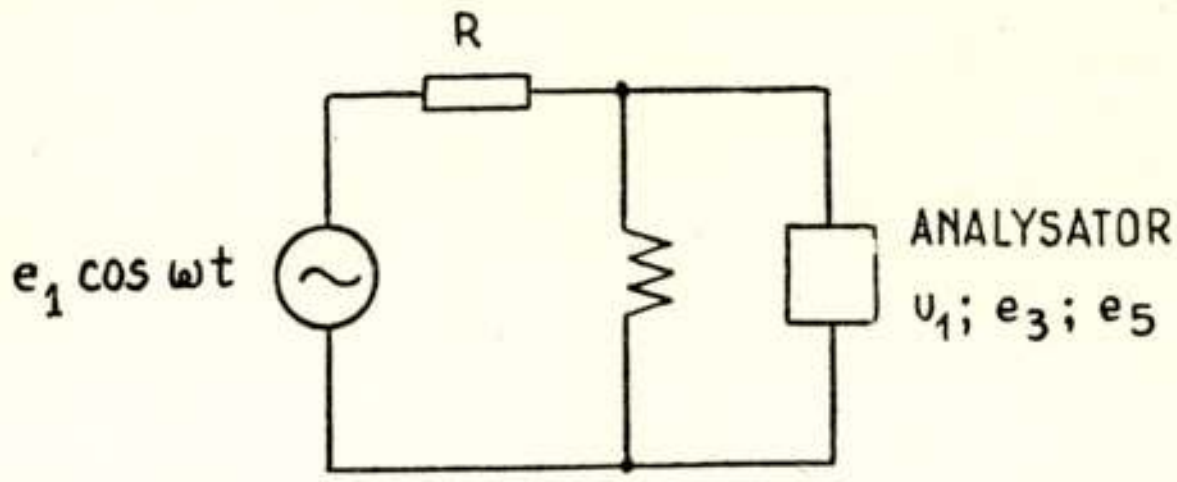

Fig. 4.
Bepaling van de harmonische emks.

meer e_3, e_5 enz. wordt bepaald.

Hoewel gesproken is over $e_3 = f(i_1)$ is het practischer om e_3 als functie van de eerste harmonische klemspanning u_1 te bepalen, dus $e_3 = f(u_1)$ en $e_5 = f(u_1)$.

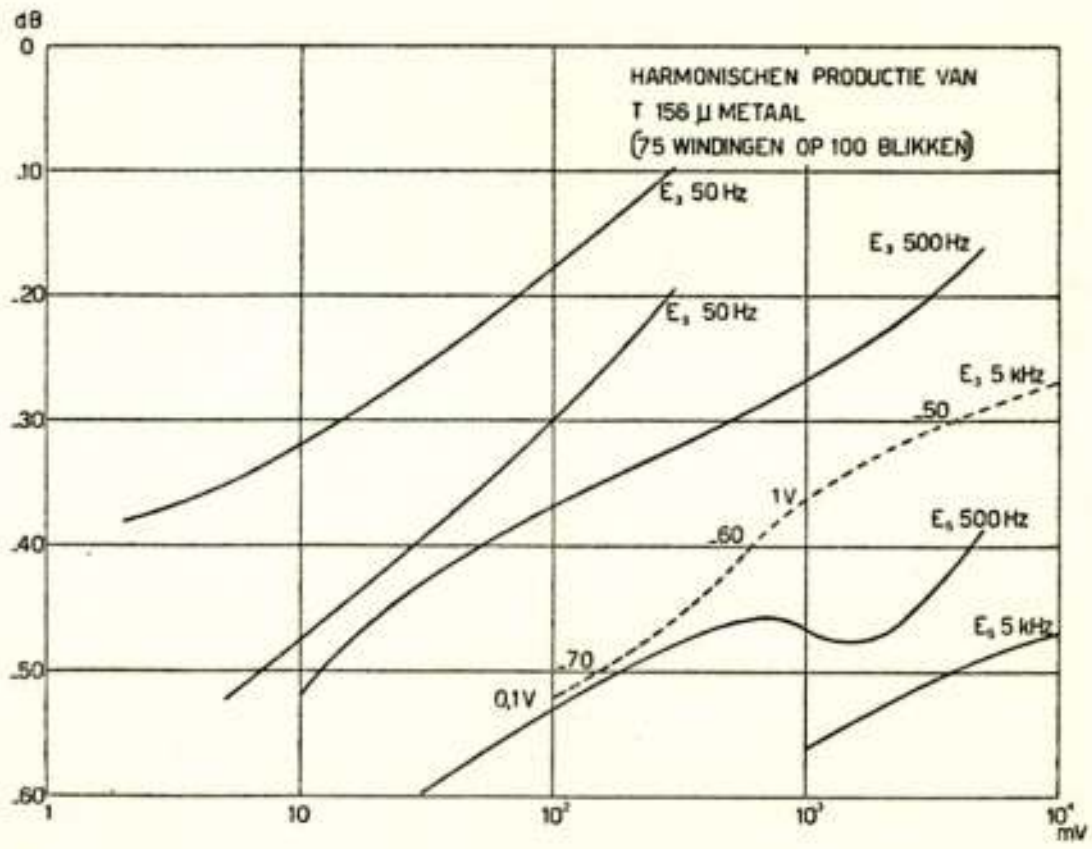

Fig. 5.

Al deze spanningen kunnen met dezelfde analysator worden gemeten. Het is duidelijk dat men ook de kortsluitstroom i_{3k} kan bepalen en met behulp hiervan weer de klemspanning.

In fig. 5 staan aangegeven e_3 en e_5 als functie van u_1 voor een smoorspoel bestaande uit 75 windingen op een kern van mumetaal T 156.

Hierbij is u_1 uitgezet in $m\,V$ (abcis) en op de ordinaat $-\,20\,log\frac{u_1}{e_3}$ respectievelijk $-\,20\,log\frac{u_1}{e_5}$ in dB.

Deze metingen zijn gedaan voor 50 Hz, 500 Hz en 5000 Hz grondfrequentie.

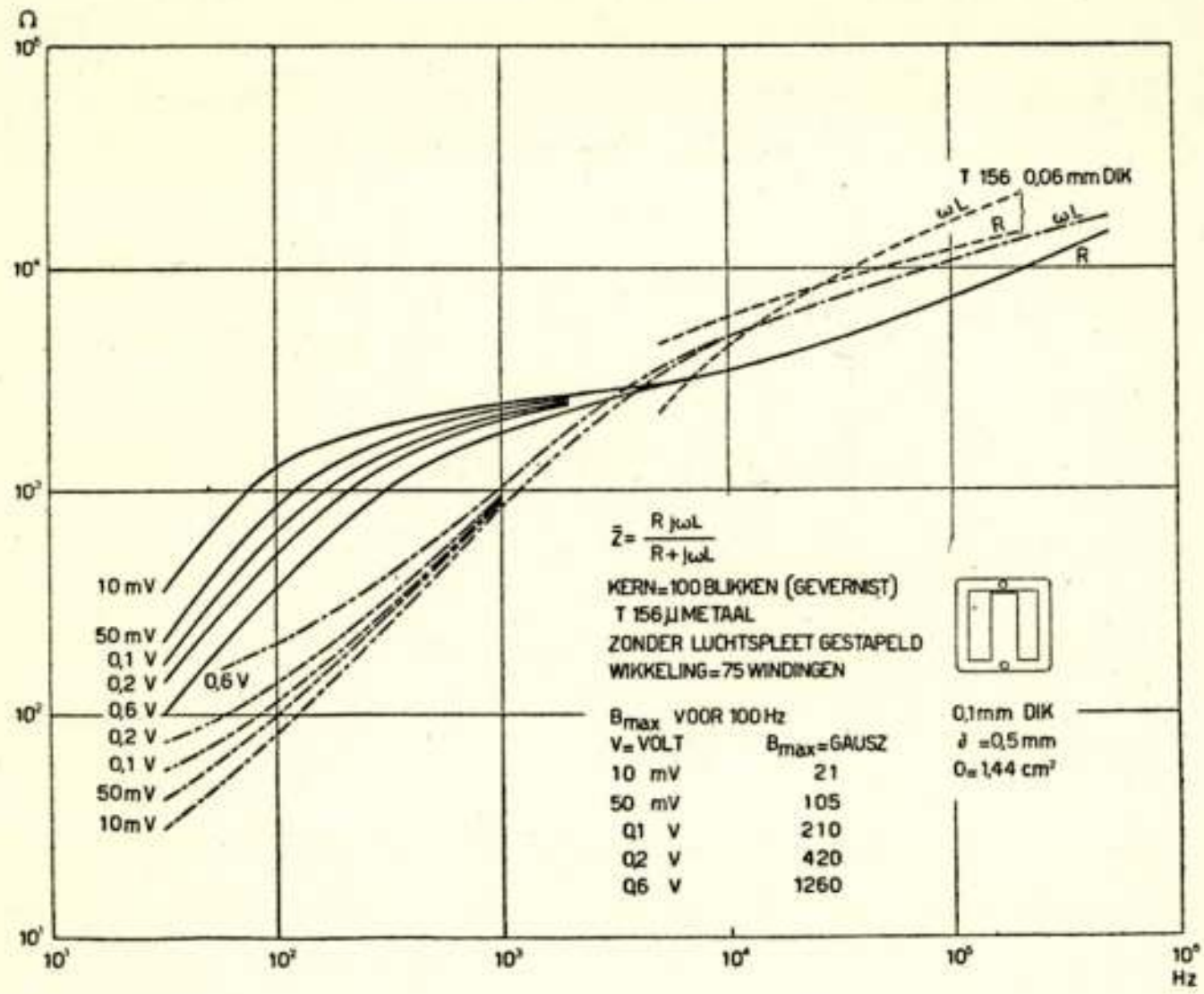

Fig. 6.

In fig. 6 staat aangegeven de impedantie van deze zelfde smoorspoel, en wel voor een klemspanning van 10; 50; 100; 200 en 600 mV.

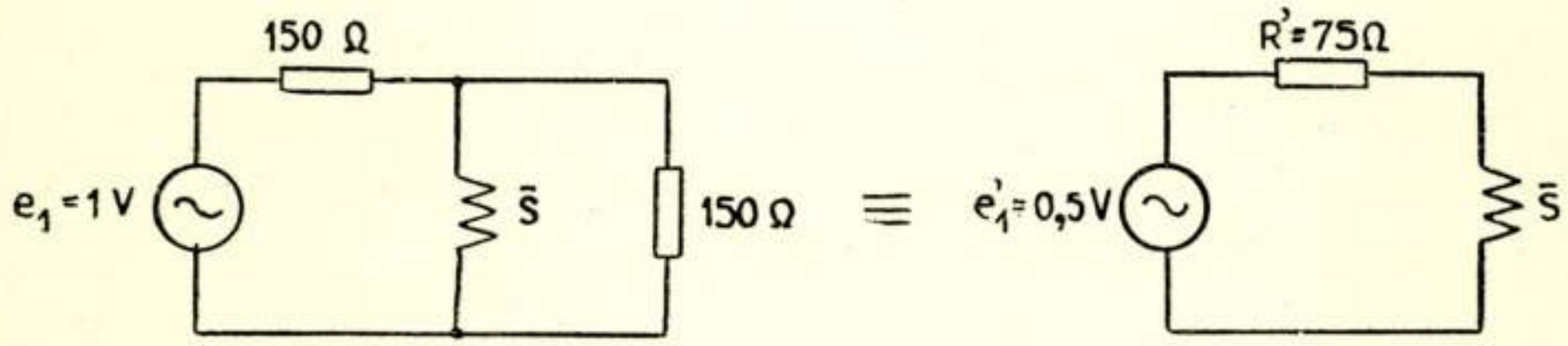

Fig. 7.
Schakeling voor een transformator voor muziek.

Nemen we als voorbeeld, dat van dit materiaal een transformator voor een muziekcircuit gemaakt moet worden tussen $2 \times 150\,\Omega$ met e_1 maximaal 1 V, laagste frequentie 30 Hz (zie fig. 7).

Gaan we uit van de curve voor 0,1 V (fig. 6) dan lezen we daaruit af voor $R = 140\,\Omega$ en $\omega L = X = 54\,\Omega$.

Willen we bij 30 Hz een val van maximaal 0,1 $dB \approx 1\%$ toelaten dan moet $R = 100 \times 75 = 7500$ worden, of wel het aantal windingen moet dan worden:

$$n = \sqrt{\frac{7500}{140}} \times 75 = \sqrt{53} \times 75 = 7{,}3 \times 75 = 540\,,$$

terwijl de toelaatbare spanning dan $7{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}73$ V bedraagt.

Tegelijkertijd vinden we voor $\omega L = X = 53 \times 54\ \Omega = 2850\ \Omega$; welk bedrag voor de lineaire karakteristiek practisch geen rol speelt.

Daalt het niveau dan wordt R groter, dus gunstiger, weliswaar wordt X kleiner, maar dit levert pas gevaar op als X kleiner wordt dan $7 \times 75 = 525\ \Omega$.

Voor $X = 7\,R$ ontstaat immers ook een spanningsval van $\sqrt{1 + \frac{1}{7^2}} = 1{,}01$ of ongeveer 0,1 dB.

In de bovengenoemde bedrijfstoestand bedraagt $u_1 = 0{,}5$ V of per 75 windingen $\frac{500}{7{,}3} = 70$ mV.

Uit fig. 5 lezen we nu af voor een grondfrequentie van 50 Hz (de curve voor 30 Hz is niet getekend) met $u = 70$ mV een bedrag van $-20\,dB$ voor de emk van de 3° harmonische en $-33\,dB$ voor de emk van de 5e harmonische.

Deze bedragen moeten worden vermenigvuldigd met

$$\left|\frac{\overline{S}_{150} + R'}{R'}\right| \approx \left|\frac{\overline{S}_{150}}{R}\right| \quad \text{respectievelijk} \quad \left|\frac{\overline{S}_{250}}{R'}\right| \quad \text{om}$$

de getalwaarde op te leveren voor de harmonische klemspannningen.

In fig. 6 lezen we op de curve voor de impedantie bij 0,1 V voor 150 Hz respectievelijk 250 Hz af:

$R_{150} = 53 \times 950\ \Omega = 50.000\ \Omega$ $\qquad$ $R_{250} = 53 \times 1400\ \Omega = 75.000\ \Omega$

$X_{150} = 53 \times 150\ \Omega = 8.000\ \Omega$ $\qquad$ $X_{250} = 53 \times 240\ \Omega = 12.700\ \Omega$

Dit geeft practisch voor $\left|\frac{\overline{S}_{150}}{R'}\right| = \frac{8000}{75} \approx 100$ of $40\,dB$.

en voor $\left|\frac{\overline{S}_{250}}{R'}\right| = \frac{12700}{75} = 170$ of $45\,dB$.

Opgeteld bij de bovengenoemde waarden betekent dit:

$-40 - 20 = -60\ dB$ t.o.v. 0,5 V voor de 3° harmonische van 50 Hz.

en

$-45 - 33 = -78\ dB$ t.o.v. 0,5 V voor de 5° harmonische van 50 Hz.

N.B. Voor de impedanties van $\overline{S}_{150}$ en $\overline{S}_{250}$ werd uitgegaan van de curve voor 0,1 V; nu we echter zien dat de daadwerkelijke harmonische klemspanningen veel lager liggen, kan hiervoor een correctie worden aangebracht.

Bij de in fig. 6 aangegeven impedantie is de koperdoorsnede van de 75 meetwindingen zo groot gekozen, dat de weerstand hiervan verwaarloosd kan worden. Indien dit bij een werkelijke transformator of smoorspoel niet meer mogelijk is, kan de invloed hiervan worden verdisconteerd in R'.

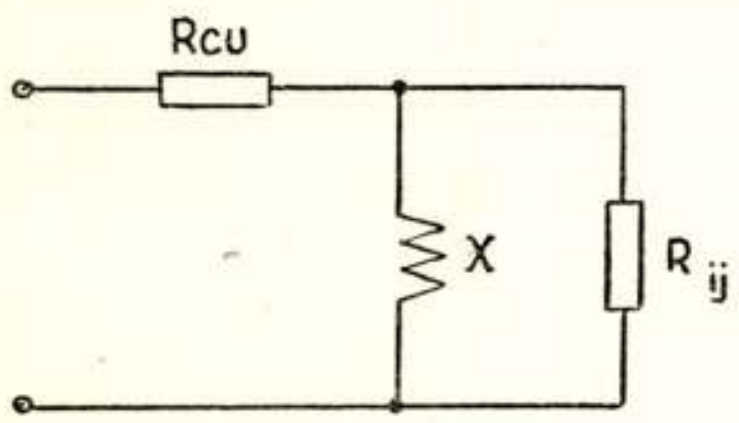

Fig. 8a.
Smoorspoel met koper- en ijzerverliezen.

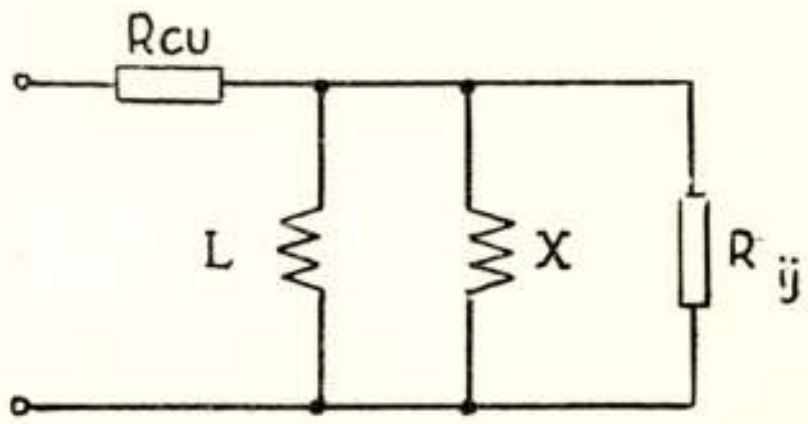

Fig. 8b.
Dezelfde smoorspoel met een luchtspleet.

Uit het schema volgens fig. 3 is het duidelijk, dat de harmonische klemspanning laag gehouden kan worden door de R laag te kiezen. Dit is duidelijk, immers voor $R = 0$ loopt er wel een harmonische stroom, maar de harmonische klemspanning is nul.

Wordt een transformator als uitgang van een versterker gebruikt, dan is het voor de harmonische productie nuttig om spanningstegenkoppeling toe te passen, aangezien hierdoor de uitgangsimpedantie verkleind wordt.

Wordt in een smoorspoel met impedantie-vervangingsschema volgens fig. 8a een luchtspleet δ aangebracht, dan komt dit in het vervangingsschema overeen met een extra zelfinductie L parallel aan de X. (fig. 8 b).

Hierbij is $L = \frac{4\pi n^2 O}{\delta} 10^{-9}$ Henry $\quad O$ = kerndoorsnede in cm².

δ = luchtspleet in cm.

De harmonischen producerende X wordt op deze wijze met een lineaire impedantie geshunt, waardoor weer een reductie van harmonischen ontstaat. In hoeverre deze werkwijze voor of nadeel bezit t.o.v. de eerstgenoemde kan slechts bij elk probleem afzonderlijk worden aangegeven.

In de eerstgenoemde afleiding is niet gesproken over de hysteresis. Opgemerkt zij dat de toegepaste afleiding voor alle problemen kan worden gebruikt, waarbij het lineaire gedrag in eerste instantie niet wordt beinvloed door de niet-lineaire eigenschappen en waarbij een eenwaardig verband bestaat tussen de twee variabelen.

Bij de experimentele beproeving van de gevonden afleiding zijn e_3 en e_5 bepaald volgens fig. 4. In de gevonden waarden is de invloed van de hysteresis dus reeds verdisconteerd. De lineaire wetmatigheid, waarbij de klemspanning nu op eenvoudige wijze kan worden berekend, (formule 13) is op diverse manieren gecontroleerd. De afwijkingen hiervan waren nooit groter dan $\pm 2\ dB$ waardoor de practische bruikbaarheid wel bewezen is.

Discussie.

J. W. A. Oosterbaan: Hebt U ook Ferrieten onderzocht?

Ir W. H. van Zoest: Ja, enkele metingen aan verricht — Q kan inderdaad gunstiger zijn dan voor gelamelleerd magnetische materialen.

O: Is een conclusie gebaseerd op de lineaire vervorming en de theorie van quasie-lineaire netwerken, niet voorbarig met het oog op het feit dat U slechts één harmonische spanning beschouwt?

v. Z.: Ja inderdaad, maar de ferromagnetische vervorming is quantitatief zeer moeilijk te berekenen. De hierboven aangegeven rekenwijze geeft in ieder geval enig inzicht in de reductie die door de belasting optreedt. Publicaties zijn mij persoonlijk niet bekend.

Ir J. C. van Marle: Tot welke frequenties kan bij deze beschouwing de spreiding verwaarloosd worden?

v. Z.: Verwaarlozing van de spreiding is niet noodzakelijk; in voorkomende gevallen kan de invloed hiervan in het ontwerp van de kern worden verdisconteerd.

In zeer veel practische gevallen ligt het frequentiegebied waar de dwarsimpedantie een rol speelt zo ver verwijderd van het gebied waar de spreiding merkbaar is, dat deze verwaarlozing volkomen gemotiveerd is.

Ir H. N. Hansen: Is het inderdaad juist dat bij een groter toegelaten tussenschakelverlies bij de laagste frequentie bij een lagere Q van de transformator de optimale verhouding tussen L_p en R_p wordt bereikt?

v. Z.: Noemen we de langsweerstand R, het reactieve deel van de dwarsadmittantie $\frac{1}{pR}$ en het reële deel hiervan $\frac{1}{QpR}$ dus $\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{jpR} + \frac{1}{QpR}$, dan is bij benadering het tussenschakelverlies.

$N = \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{pQ} = \frac{1}{2p^2}\left(1 + \frac{2p}{Q}\right)$ neper; hierbij is $\frac{1}{2p^2}$ de dempingsbijdrage van het reactieve deel en $\frac{1}{pQ}$ de bijdrage van het reële deel der dwarsadmittantie.

De verdeling is blijkbaar als $1 : \frac{2p}{Q}$; deze verdeling vertoont geen optimum voor practisch voorkomende waarden van $\frac{2p}{Q}$.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Theoretische grenzen voor de overdracht van brede frequentiebanden

door W. Nijenhuis

Natuurkundig Laboratorium der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken
Eindhoven - Nederland

Voordracht gehouden voor het Nederlands Radiogenootschap op 20 Oct. 1949

SUMMARY

The present paper treats the question of obtaining maximum gain in a given frequency band from two-terminal and four-terminal interstages. It has been attempted to elucidate and, partly, to generalize the treatment in Bode's: Network Analysis and Feedback Amplifier Design.

§ 1.

De navolgende beschouwingen moeten dienen als een demonstratie van de toepassing van enkele algemene mathematische betrekkingen op het ontwerpen van schakelingen voor versterkertrappen. Men zal ze kunnen opvatten als een toelichting op hoofdstuk 12 van het boek van Bode[1]) „Network Analysis and Feedback Amplifier Design".

Wij zullen het vraagstuk van de overdracht van brede frequentiebanden daarbij stellen als de vraag naar de maximaal bereikbare uniforme overdracht in een gegegeven frequentieband.

Wij zullen uitsluitend denken aan de overdracht bij passieve vierpolen die uit discrete lineaire elementen zijn opgebouwd en door buizen met elkaar zijn verbonden. Het zal blijken dat de grens aan de bereikbare overdracht in deze gevallen gesteld wordt door de steeds aanwezige schadelijke buiscapaciteiten over de klemmen van de gebruikte vierpolen.

Het is duidelijk dat wij ons bij onze beschouwingen kunnen

---

[1]) H. W. Bode, Network Analysis and Feedback Amplifier Design, 1946 D. van Nostrand Company, New York.

beperken tot een enkele trap van de versterker en wij zullen daarvoor uitgaan van de schakeling van fig. 1.

De capaciteiten die de versterking beperken zijn de anode- en de roostercapaciteit, C_1 en C_2, van de beide buizen, welke capaciteiten wij in de vierpool opgenomen denken. De vierpool zullen wij karakteriseren door de drie impedanties Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} die voorkomen in de vierpoolvergelijkingen.

$$V_1 = Z_{11} I_1 - Z_{12} I_2 ,$$
$$V_2 = Z_{12} I_1 - Z_{22} I_2 .$$

Hieruit blijkt, dat Z_{11} en Z_{22} gewone (tweepool-) impedanties

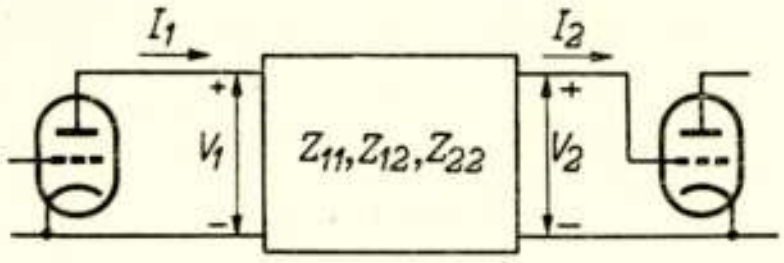

Fig. 1.
Gebruik van de vierpool in een versterkertrap.

zijn, die wij bij nullast tussen de klemmenparen 1 resp. 2 kunnen meten. Z_{12} is de grootheid die de overdracht bepaalt. Immers mogen wij bij gebruik van penthoden I_1 als gegeven opvatten, terwijl wij $I_2 = 0$ mogen stellen, waardoor $V_2 = Z_{12} I_1$ wordt. Op een factor S — steilheid van de voorafgaande buis — na, geeft Z_{12} dus de versterking aan. Als bijzonder geval van een vierpool kunnen wij de schakeling van fig. 2 aanzien, waarbij de

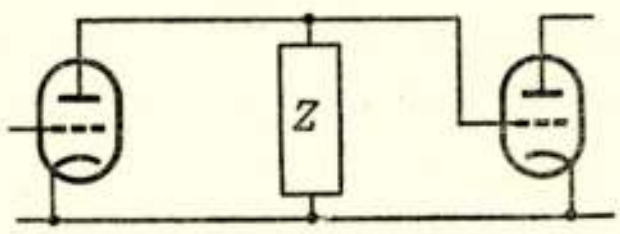

Fig. 2.
Gebruik van een tweepool in een versterkertrap.

vierpool is ineengeschrompeld tot één impedantie Z en waarbij $Z_{12} = Z_{11} = Z_{22} = Z$. Deze impedantie zal nu als paralleltak de som van de beide buiscapaciteiten bevatten.

De drie impedanties Z_{11}, Z_{22} en Z_{12} zijn functies van $j\omega$; wij willen liever de combinatie $j\omega$ met de letter p aanduiden en dan de functies $Z_{11}(p)$, $Z_{22}(p)$ en $Z_{12}(p)$ opvatten als functies van een complexe veranderlijke, zoals in de functietheorie te doen gebruikelijk is. Wij beschouwen dan de gewone impedantie-

waarden $Z(j\omega)$ als de waarden die de functie $Z(p)$ aanneemt op de imaginaire as van het complexe p-vlak.

Nu kan men voor complexe functies als de onderhavige een groot aantal mathematische betrekkingen afleiden, die alle tot stand komen door het beschouwen van zekere contour-integralen. De contour bestaat uit een stuk c_1, langs de imaginaire as, en een deel c_2, een halve cirkel met zeer grote straal R om de oorsprong in het rechter halfvlak. De integratierichting is in fig. 3 door pijlen aangegeven. Wij zullen de afleiding hier demonstreren voor $\oint Z(p)\, dp$, waarbij $Z(p)$ de impedantie van fig, 2 voorstelt. Eerst zullen wij echter geheel algemeen aangeven welke onderstellingen wij omtrent de integrand moeten maken.

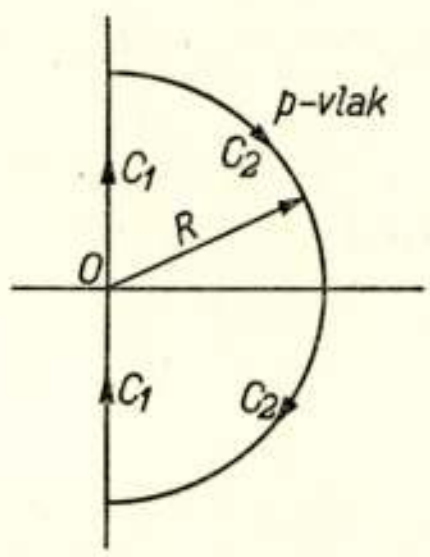

Fig. 3.
Integratieweg, gebruikt bij de afleiding van de besproken betrekkingen.

a) Er zijn geen singulariteiten in het rechter halfvlak.

Hieraan is bij impedanties van passieve netwerken steeds voldaan, omdat daarbij geen exponentieel aangroeiende eigentrillingen kunnen voorkomen.

b) Reëel en imaginair deel van $Z(j\omega) = R(\omega) + j\,X(\omega)$ zijn resp. even en oneven functies van ω.

Hieraan is eveneens voldaan indien $Z(p)$ voor reële waarden van p reëel is, hetgeen bij netwerken steeds het geval is.

c) Betreffende het gedrag van de integrand op het gedeelte c_2 van de contour zullen wij onderstellen dat hier de ontwikkeling geldt:

$$Z(p) = \frac{B_\infty}{p} + \frac{A_1}{p^2} + \dots \quad .$$

Physisch wil dit zeggen dat voor hoge frequenties de impedantie zich als een capaciteit gedraagt. In ons geval is dit

de som van de schadelijke capaciteiten C_1 en C_2 en is dus $B_\infty = 1/(C_1 + C_2)$.

d) De integrand heeft op de imaginaire as alléén singulariteiten waarvoor geldt $\lim\limits_{p \to p_0} (p - p_0) Z(p) = 0$, als p_0 de plaats van de sigulariteit voorstelt.

Bij een tweepoolimpedantie betekent dit: geen polen op de imaginaire as, d.w.z. geen ongedempte parallel kringen of capaciteit in serie met de klemmen. Dat deze eis geen beperking van de algemeenheid inhoudt, zullen wij hier niet aantonen.

Volgens de integraalstelling van Cauchy is nu

$$\oint_C Z(p)\, dp = 0 \,.\ ^{1)}$$

Dus

$$\int_{c_1} Z(p)\, dp + \int_{c_2} Z(p)\, dp = 0 \,.$$

Hierin heeft de tweede term de waarde $-j\pi B_\infty$.[2])

Stellen wij in de eerste term $p = j\omega$, dan vinden wij dus

$$j \int_{-\infty}^{+\infty} Z(j\omega)\, d\omega = j\pi B_\infty \,.$$

Gebruiken wij nu de even-en-oneveneigenschappen van het reële en het imaginaire deel, dan verkrijgen wij

$$\int_0^\infty R(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2} B_\infty \,, \tag{1}$$

m.a.w. het totale oppervlak onder de kromme $R(\omega)$ wordt bepaald door de parallelcapaciteit over de klemmen.[3])

In ons geval is dus

$$\int_0^\infty R(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2(C_1 + C_2)} \,. \tag{1'}$$

---

[1]) Eventuele singulariteiten op de imaginaire as moet men omgaan door in de integratieweg kleine, in het rechter halfvlak gelegen, halve cirkeltjes aan te brengen. Onder de voorwaarde *d* verkrijgt men hiervan geen extra bijdrage.

[2]) Zie Appendix I.

[3]) Wij merken hierbij nog op, dat voor een tweepoolimpedantie het reële deel een functie van ω is, die steeds positief is. Dit hoeft niet het geval te zijn bij het reële deel van een overdrachtsimpedantie!

§ 2.

De gevolgde afleiding kunnen wij nu op vele andere functies toepassen. Op soortgelijke wijze vinden wij bijv. een uitdrukking voor het oppervlak onder de kromme van het imaginaire deel als functie van de frequentie. Ook kan men, door een kleine verandering, een betrekking vinden die het imaginaire deel doet kennen als het reële deel gegeven is, of die de fasedraaiïng geeft behorende bij een gegeven modulus, alles als functie van de frequentie. Zelfs kan men de modulus geven in één frequentiegebied en de fasedraaiïng in het complementaire gebied en dan een formule afleiden die de bijbehorende complexe functie in zijn geheel geeft. Wij zullen nog één voorbeeld van dit soort betrekkingen nader bespreken.

Wij bekijken daartoe een impedantiefunctie $Z(p)$ die zich voor grote waarden van $|p|$ gedraagt als

$$Z(p) \to \frac{A_n}{p^n}\left[1 + \frac{B}{p} + \ldots\right] .$$

Slechts bij overdrachtsimpedanties kan $n > 1$.

Wij beschouwen nu als integrand de functie

$$\frac{\ln Z(p) + n \ln p}{\sqrt{1 + p^2/\omega_0^2}} ,$$

waarin ω_0 een positieve grootheid voorstelt, die later de rol van grensfrequentie zal gaan spelen.

Singulariteiten van de integrand in het rechterhalfvlak zijn alleen eventuele polen en nulpunten van $Z(p)$. Polen in het rechter halfvlak komen bij passieve netwerken niet voor. Nulpunten aldaar kunnen alleen optreden bij overdrachtsimpedanties, maar ontbreken wanneer de overdrachtsimpedantie van het zg. minimumfasetype is[1] [2].

Voor grote waarden van $|p|$ gedraagt de integrand zich als

$$\frac{\omega_0 \ln A_n}{p} + \frac{\omega_0 B}{p^2} + \ldots ,$$

terwijl ook aan de eis d voldaan is. De integrand voldoet dus

---

[1]) Bode l.c. p. 117.

[2]) W. Nijenhuis and F. L. Stumpers On some properties of electrical networks, Physica 8, 289-307, 1941.

aan alle voorwaarden a tot d zodat wij onze uitkomst (1) op deze functie kunnen toepassen. Wij verkrijgen dan:

$$\int_0^\infty \mathrm{Re}\left\{\frac{\ln Z(j\omega) + n \ln(j\omega)}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}}\right\} d\omega = \frac{\pi}{2}\omega_0 \ln A_n .$$

Splitsen wij nu $\ln Z(j\omega)$ in $\ln|Z(j\omega)| + j \arg\{Z(j\omega)\} = \alpha(\omega) + j\beta(\omega)$ dan kunnen wij deze vergelijking als volgt schrijven:

$$\int_0^{\omega_0} \frac{\alpha(\omega) + n \ln \omega}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}} d\omega + \int_{\omega_0}^\infty \frac{\beta(\omega) + n\pi/2}{\sqrt{\omega^2/\omega_0^2 - 1}} d\omega = \frac{\pi}{2}\omega_0 \ln A_n ,$$

omdat het reële deel van onze integrand een verschillende gedaante heeft voor $|\omega| < \omega_0$ en $|\omega| > \omega_0$. Wij kunnen de eerste term nog omwerken [1]) waardoor wij komen tot

$$\int_0^{\omega_0} \frac{\alpha(\omega)}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}} \frac{d\omega}{\omega_0} + \int_{\omega_0}^\infty \frac{\beta(\omega) + n\pi/2}{\sqrt{\omega^2/\omega_0^2 - 1}} \frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{2^n A_n}{\omega_0^n} . \quad (2)$$

Dit is een tweede belangrijke formule in verband met onze beschouwingen. Indien wij ω_0 vereenzelvigen met de grens van de frequentieband waarvoor wij ons interesseren, legt de formule een verband tussen de modulus van de overdracht in de band, de fasedraaiïng er buiten en het gedrag van $Z(p)$ bij hoge frequenties.

§ 3.

Wij zullen nu nagaan wat de formules ons leren kunnen voor een schakeling als van fig. 2. Wij zagen al, dat de overdracht dan gegeven wordt door de impedantie $Z(p)$, die zich bij hoge frequenties als een capaciteit gedraagt. In (2) is dus $n = 1$ en $A_n = 1/(C_1 + C_2)$.

De modulus $\alpha(\omega)$ willen wij over de gehele band $0 - \omega_0$ constant maken en bovendien zo groot mogelijk. Daar het tweede lid van (2) nu echter de vaste waarde $\frac{\pi}{2} \ln \frac{2}{\omega_0(C_1 + C_2)}$ bezit, kunnen wij de eerste term alleen groot maken, door de tweede term klein te maken. Bij een tweepoolimpedantie echter, kan

[1]) Zie Appendix II.

de fasedraaiïng nooit minder worden dan $\frac{\pi}{2}$, bij welke gunstigste keuze de gehele tweede term nul wordt. Wij verkrijgen zodoende onmiddellijk, wegens

$$\int^{\omega_0} \frac{d\omega/\omega_0}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}} = \arcsin(\omega/\omega_0)\Big|_0^{\omega_0} = \frac{\pi}{2} ,$$

dat

$$a_{\max} = \ln \frac{2}{\omega_0 (C_1 + C_2)} . \tag{3}$$

De maximale overdracht ligt dus een factor 2 boven de waarde die men bij de frequentie ω_0 met de schadelijke capaciteiten alleen zou bereiken.

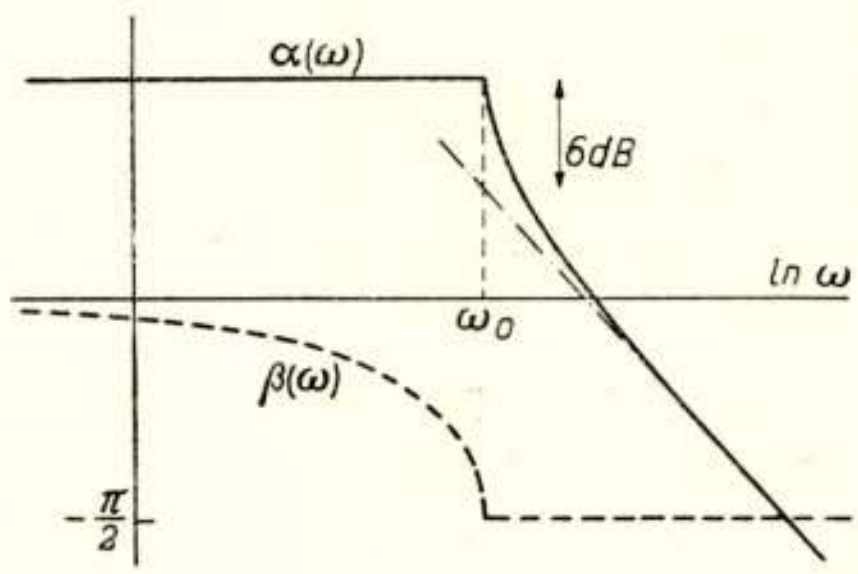

Fig. 4.
Logarithme-modulus en fasedraaiïng van een tweepoolnetwerk met maximale overdracht in een gegeven band.

Echter moeten wij nog trachten te vinden met welk soort netwerk wij deze maximale overdracht ook werkelijk verwezenlijken. Wij weten daartoe van de impedantiefunctie de modulus beneden de frequentie ω_0 en de fasedraaiïng erboven, en, zoals wij hierboven aanduidden, ligt dan de gehele functie vast. Men vindt ervoor, zie fig. 4,

$$Z(p) = \frac{2/\omega_0 (C_1 + C_2)}{\sqrt{1 + p^2/\omega_0^2} + p/\omega_0} , \tag{4}$$

hetgeen gemakkelijk is te verifiëren.

Dit is de impedantie van een bekend netwerk; het is nl. de impedantie van een oneindig lang, of een goed afgesloten laagdoorlatend filter, dat met een paralleltak met de volle capa-

citeitswaarde begint. Daardoor komen wij tot de schakeling van fig. 5. De capaciteit waarmee de impedantie aanvangt behoeft niet opzettelijk te worden aangebracht; zij wordt door de buiscapaciteiten geleverd.

De schakeling was al langer bekend; zij werd in 1939 door Wheeler[1]) aangegeven en volgens Bode al vóór 1930 door Norton[2]) gevonden. De waarde van het hierboven weergegeven betoog is dat wij nu met zekerheid weten dat zij de maximaal bereikbare overdracht oplevert.

Aan de uitdrukking (2) kunnen we nog de opmerking ontlenen dat voor de gevonden impedantie (4) de term

$$\int_0^{\omega_0} \frac{a(\omega)}{\sqrt{1-\omega^2/\omega_0^2}} \frac{d\omega}{\omega_0}$$

dezelfde waarde heeft, als het geval zou zijn bij aanwezigheid van de schadelijke capaciteiten alléén. Op *deze* wijze gemiddeld, bezitten beide schakelingen dus dezelfde overdracht.

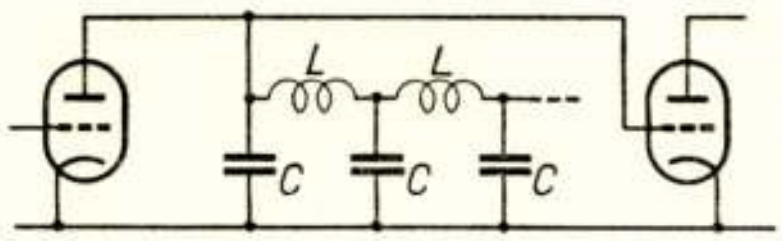

Fig. 5.
Tweepoolnetwerk met maximale overdracht in een gegeven band.

§ 4.

Zoals Bode verder opmerkt, kan men aan de schakelingen van Wheeler gemakkelijk zien, dat men bij gebruik van vierpolen aan overdracht kan winnen. Gemakshalve onderstellen wij daarbij even dat de buiscapaciteiten C_1 en C_2 gelijk zijn. Wij gebruiken weer een oneindig lang, of een goed afgesloten laagdoorlatend filter maar sluiten de tweede buis aan nà de eerste cel (fig. 6). Daar in het doorlaatgebied van het filter geen verzwakking optreedt zijn de amplituden van V_1 en V_2 hier gelijk en kan men dus de grootte van de overdracht berekenen uit de ingangsimpedantie van het filter. De modulus hiervan wordt, geheel als in het vorige voorbeeld, bepaald door de schadelijke capaciteit welke nu echter slechts de helft bedraagt, zodat men

[1]) H. A. Wheeler, Proc. Inst. Radio Engrs 27, p. 429—438. 1939.
[2]) Bode l. c. p. 408.

een factor 2 in overdracht winnen kan door gebuik te maken van dit soort vierpool.

Bode heeft echter aangetoond dat men nog iets meer kan winnen. Hij gaat daartoe uit van een overdrachtsfunctie van de vorm

$$Z(p) = \frac{A}{\left(\sqrt{1 + p^2/\omega_0^2} + p/\omega_0\right)^n}; \; n \text{ oneven.} \tag{5}$$

Alle functies van dit type bezitten voor $0 < \omega < \omega_0$ een constante modulus, $|Z(j\omega)| = A$, die dus de — nog onbekende — overdracht voorstelt, terwijl voor $\omega_0 < \omega < \infty$ de fasedraaiïng constant en gelijk aan $-n\frac{\pi}{2}$ is. De gunstigste tweepoolimpedantie (uit fig. 5, zie (4)) zowel als de overdrachtsimpedantie van de schakeling in fig. 6. zijn hiervan bijzondere gevallen, met resp.

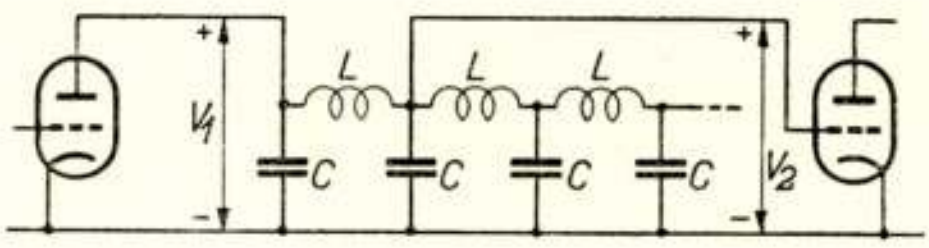

Fig. 6.
Schakeling van Wheeler voor het bereiken van maximale overdracht met een vierpoolnetwerk.

$n = 1$ en $n = 3$. Het merkwaardige is nu dat de schakeling van Wheeler uit fig. 6 niet de grootste overdracht levert, die bij dit soort frequentieafhankelijkheid mogelijk is. Om tot de grootste overdracht te komen, die bij gegeven frequentieafhankelijkheid mogelijk is, kunnen wij de volgende — zeer algemene — redering houden.

Wij zoeken een vierpool, waarvan de overdrachtsimpedantie Z_{12} — als in (5) — wel een bekend gedrag als functie van de frequentie bezit, maar waarvan wij de multiplicatieve constante die de „schaal" aangeeft — als A in (5) — nog niet kennen. Van Z_{11} en Z_{22} kennen wij slechts het gedrag voor hoge frequenties, nl. als de schadelijke capaciteiten C_1 en C_2 dus

$$Z_{11} \rightarrow \frac{1}{pC_1} + \ldots \text{ en } Z_{22} \rightarrow \frac{1}{pC_2} + \ldots .$$

Om dit vraagstuk op te lossen bekijken wij echter eerst het omgekeerde vraagstuk: Wij denken de overdrachtsimpedantie

Z_{12} in zijn geheel gegeven, met constante en al, en vragen naar die ingangs- en uitgangsimpedanties Z_{11} en Z_{22}, die zich bij hoge frequenties als zo klein mogelijke impedanties $\frac{1}{pC_1'}$ en $\frac{1}{pC_2'}$ gedragen, d.w.z. als zo groot mogelijke capaciteiten C_1' en C_2' met een verhouding die volgt uit $C_1'/C_2 - C_1/C_2$. Immers, dan zal de factor waarmee men achteraf alle impedanties moet vermenigvuldigen om C_1' en C_2' gelijk te maken aan de gegeven C_1 en C_2, zo groot mogelijk zijn.

De gegevens formuleren wij nu op de volgende wijze.

Met Z_{12}, is nu het reële deel $R_{12}(\omega)$ gegeven, terwijl de gegeven verhouding van de capaciteiten volgens (1') neerkomt op

$$\frac{\int_0^\infty R_{11}(\omega)\,d\omega}{\int_0^\infty R_{22}(\omega)\,d\omega} = \frac{C_2'}{C_1'} = \frac{C_2}{C_1}\,.$$

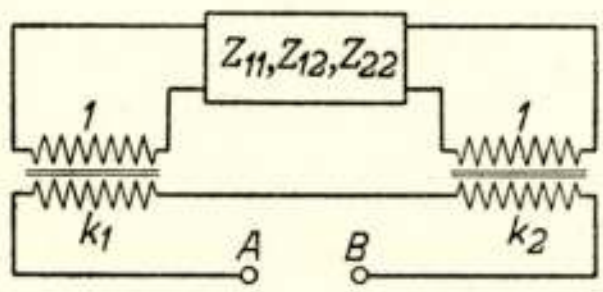

Fig. 7.
Schakeling om de impedantie van formule (6) te realiseren.

De voorwaarden dat de verschillende grootheden tot een passieve vierpool zullen behoren volgen uit de eis dat de combinatie

$$k_1^2 Z_{11} - 2\,k_1 k_2 Z_{12} + k_2^2 Z_{22} \tag{6}$$

voor willekeurige waarden van de parameters k_1 en k_2 altijd de impedantie van een tweepool voorstelt. Het is nl. de impedantie die men in fig 7 tussen de klemmen A en B zou meten, indien de tussengevoegde ideale transformatoren de transformatie verhoudingen $k_1 : 1$ en $k_2 : 1$ bezitten. Dit houdt o.a. in: $R_{11}(\omega) \geqq 0$, $R_{22}(\omega) \geqq 0$ en $R_{11}(\omega) \,.\, R_{22}(\omega) \geqq R_{12}^2(\omega)$. [1])

Het minimaal maken van $1/C_1'$ en $1/C_2'$ laat zich met (1') schrijven als het minimaal maken van de integralen

$$\int_0^\infty R_{11}(\omega)\,d\omega \quad \text{en} \quad \int_0^\infty R_{22}(\omega)\,d\omega\,. \tag{7}$$

[1]) Zie bijv. B. D. H. Tellegen, T. Ned. Radiogenootschap 9, 235, 1942.

Het minimaal maken van (7) is equivalent met het minimaal maken van

$$A \int_0^\infty R_{11}(\omega)\, d\omega + B \int_0^\infty R_{22}(\omega)\, d\omega\,, \tag{7a}$$

waarin A en B vaste constanten voorstellen. Immers, vond men voor (7a) een minimum dat niet tevens overeenkwam met dat voor (7), dan zou men, al naar de individuele termen van (7a) uitvielen, de uitdrukkingen (7) kleiner kunnen maken door die uit (7a) te gebruiken, of (7a) kleiner kunnen maken door de functies van (7) te kiezen.

Het is duidelijk dat wij de uitdrukkingen (7) kunnen verkleinen zolang $R_{11}(\omega)\ R_{22}(\omega) > R_{12}^2(\omega)$. Wij zullen dus voor de verdere beschouwing mogen onderstellen dat $R_{11}\, R_{22} = R_{12}^2$. Onder deze bijvoorwaarde schrijven wij (7a)

$$A \int_0^\infty R_{11}(\omega)\, d\omega + B \int_0^\infty \frac{R_{12}^2(\omega)}{R_{11}(\omega)}\, d\omega = \int_0^\infty \left(A\, R_{11} + B \frac{R_{12}^2}{R_{11}} \right) d\omega\ .$$

Deze integraal zal minimaal worden als wij, bij elke frequentie, de integrand tot een minimum maken. Dit houdt in dat

$$A - B\, R_{12}^2 / R_{11}^2 = 0$$

of

$$R_{11}(\omega) = \sqrt{\frac{A}{B}} \left| R_{12}(\omega) \right|$$

(daar immers R_{11} steeds positief moet zijn moeten we uit R_{12}^2 steeds de positieve wortel trekken!). Tevens is nu $R_{22} = \sqrt{\frac{B}{A}} \left| R_{12} \right|$.

Dan vinden wij de verhouding

$$\int_0^\infty R_{11}(\omega)\, d\omega \Big/ \int_0^\infty R_{22}(\omega)\, d\omega = \frac{A}{B}\ ,$$

waaruit blijkt $\frac{A}{B} = \frac{C_2}{C_1}$. Onder inachtneming van de passiviteits eisen verkrijgen wij dus de kleinste waarden voor $1/C_1'$ en $1/C_2'$ als wij kiezen

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, R_{11}(\omega) = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\, R_{22}(\omega) = \left| R_{12}(\omega) \right|\ .$$

Gaan wij nu weer terug naar ons oorspronkelijk probleem, waar Z_{12} gegeven was op een factor na, dan kunnen wij nu die factor bepalen door (1') toe te passen op

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, R_{11}(\omega) = \left| R_{12}(\omega) \right| .$$

Wij verkrijgen zo

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \int_0^\infty R_{11}(\omega)\, d\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{C_1 C_2}} = \int_0^\infty \left| R_{12}(\omega) \right| d\omega$$

waarin het rechterlid de onbekende factor bevat. Wij zullen dit in § 5 toepassen.

Voor de ingangs- en de uitgangsimpedantie die wij kunnen berekenen uit hun gegeven reëel deel geldt nu ook $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, Z_{11} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\, Z_{22}$. Deze impedanties bezitten dan geen polen op de imaginaire as. Zou men nl. in serie met ingangs- of uitgangsklemmen nog een zuivere reactantie willen aanbrengen, bijv. een parallelkring, waardoor de reële delen R_{11} en R_{22} niet zouden veranderen terwijl ook de overdrachtsimpedantie hierdoor hetzelfde zou blijven, dan zou men toch achterop geraken omdat de capaciteit die men dan bij hoge frequenties aan de ingangszijde zou meten een serieschakeling zou zijn van de nu aanwezige C_1 met de capaciteit van de parallelkring. Men zou dan dezelfde overdracht behouden bij kleinere buiscapaciteiten, waarbij juist een grotere overdracht zou zijn toegestaan.

Voor gelijke buiscapaciteiten, $C_1 = C_2$, kunnen wij de conclusie als volgt onder woorden brengen: *De grootste overdracht bereiken wij alleen met symmetrische vierpolen. Zijn de capaciteiten niet gelijk dan moeten wij een combinatie gebruiken van een symmetrische vierpool met een ideale transformator waarvan de transformatieverhouding juist* $k = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ *is. Dan is* $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, Z_{11} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\, Z_{22}$, *voor het reële deel waarvan geldt*

$$\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, R_{11} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\, R_{22} = \left| R_{12} \right| .$$

Nu is elke symmetrische vierpool te realiseren met behulp van een symmetrische brugschakeling. Wij gaan daarom onze vierpool realiseren met de schakeling van fig. 8. Daarvoor geldt:

$$\left.\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{1}{2k^2}(Z_a + Z_b)\,, \\ Z_{22} &= \frac{1}{2}(Z_a + Z_b)\,, \\ Z_{12} &= \frac{1}{2k}(Z_a - Z_b)\,. \end{aligned}\right\}$$

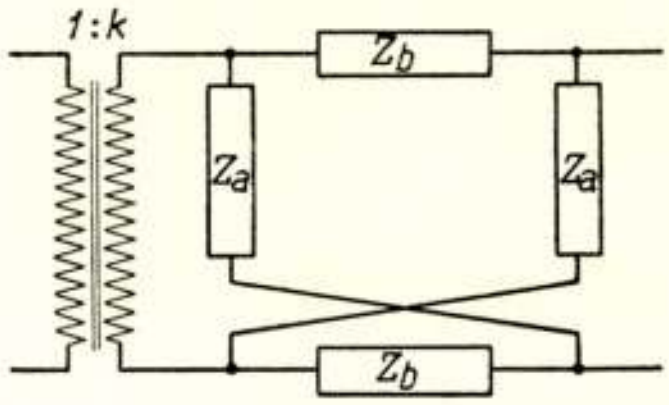

Fig. 8.
Schakeling waarmee de maximale overdracht gerealiseerd kan worden.

Inderdaad is $Z_{22} = k^2 Z_{11}$. Voor Z_a en Z_b vinden wij:

$$\frac{1}{k} Z_a = k Z_{11} + Z_{12}\,,$$

$$\frac{1}{k} Z_b = k Z_{11} - Z_{12}\,;\; k = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\,.$$

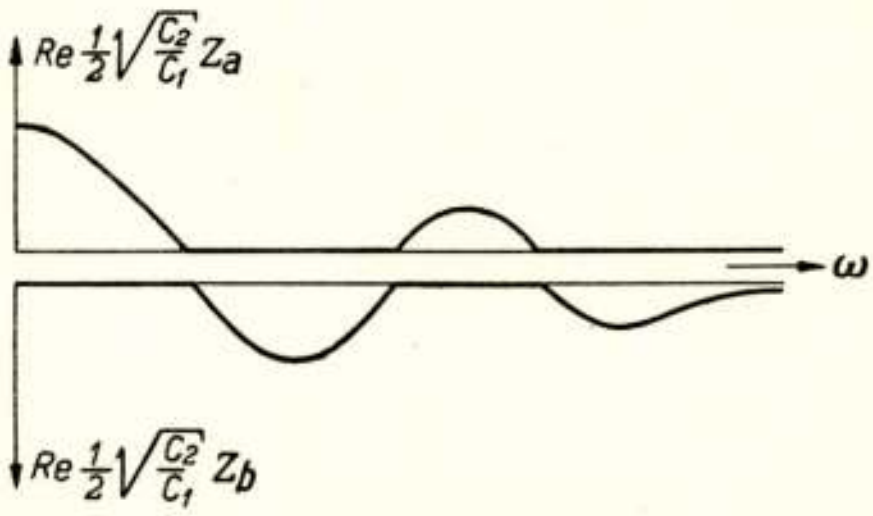

Fig. 9.
Illustratie van de wijze waarop het reële deel van de overdrachtsimpedantie gesplitst moet worden in een verschil van twee functies om bij een vierpoolnetwerk de maximale overdracht te verkrijgen.

Wegens $k R_{11} = |R_{12}|$ zijn de reële delen van Z_a en Z_b inderdaad voor alle frequenties positief, en zijn dus Z_a en Z_b realiseerbare impedanties; zie fig. 9.

Het merkwaardige is dus dat wij onafhankelijk van de gedaante van de gegeven overdrachtsimpedantie tot eenzelfde

resultaat komen: *kies een schakeling als in fig. 8 waarbij* $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\,Z_a$ *en* $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\,Z_b$ *de positieve en negatieve helften van de kromme voor* $R_{12}(\omega)$ *tot reëel deel hebben.*

Tenslotte moeten wij nog kunnen inzien dat men uit de schakeling van fig. 8 de beide capaciteiten C_1 en C_2 naar buiten kan brengen. Daartoe merken wij op dat de impedanties $\frac{1}{2k}Z_a$ en $\frac{1}{2k}Z_b$ tot reële delen de positieve resp. negatieve helft van de kromme $R_{12}(\omega)$ bezitten, waarvan de oppervlakken beide gelijk zijn aan $\frac{\pi}{4\sqrt{C_1 C_2}}$. Wij weten dus volgens (1'), dat deze impedanties zich voor hoge frequenties zullen gedragen als de capaciteit $2\sqrt{C_1 C_2}$. Dan zullen Z_a en Z_b zèlf zich gedragen als de capaciteit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\cdot 2\sqrt{C_1 C_2} = C_2$. Nu kunnen gelijke shuntcapaciteiten in de brugtakken van fig. 8 vervangen worden door even grote parallelcapaciteiten over de klemmen van de brug[1]), en op deze wijze kan men de parallelcapaciteiten die in Z_a en Z_b aanwezig zijn uitwendig realiseren met de schadelijke capaciteiten C_1 en C_2.

§ 5.

Om nu te berekenen welke overdracht wij kunnen bereiken, passen wij bovenstaande algemene beschouwingen toe op het eerder genoemd geval:

$$Z_{12} = \frac{A}{\left(\sqrt{1 + p^2/\omega_0^2} + p/\omega_0\right)^n}, \quad n \text{ oneven} > 1 . \tag{8}$$

Hierbij is, voor $\omega < \omega_0$, $R_{12} = \mathrm{Re}\, A \left\{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2} - j\omega/\omega_0\right\}^n$, hetgeen wij, na invoering van $\omega/\omega_0 = \sin\varphi$, kunnen schrijven als $R_{12} = A\cos n\varphi$. Voor $\omega > \omega_0$ is $R_{12} = 0$. Het totale oppervlak van de functie $R_{12}(\omega)$ is nul. Immers de ontwikkeling van Z_{12} voor grote waarden van $|p|$ begint men $\frac{1}{p^n}$, zodat de term met $\frac{1}{p}$, nodig voor (1), gelijk nul is.

Wij hadden reeds algemeen gevonden dat

---

[1]) Zie bijv. Bode l.c. p. 269.

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\left(k R_{11} + \frac{1}{k} R_{22}\right) d\omega = \frac{\pi}{4}\left(\frac{k}{C_1} + \frac{1}{k C_2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{C_1 C_2}}$$

en terwijl

$$\frac{1}{2}\left(k R_{11} + \frac{1}{k} R_{22}\right) = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\, R_{11} = \left| R_{12} \right| ,$$

verkrijgen wij nu:

$$\int_0^\infty |R_{12}|\, d\omega = A \int_0^{\omega_0} |\cos n\varphi|\, d\omega \ .$$

Wij vinden voor deze integraal[1]):

$$\int_0^\infty |R_{12}|\, d\omega = A\, \omega_0 \frac{n}{n^2 - 1} \cot \frac{\pi}{2n} ,$$

zodat

$$A = \frac{\pi}{2\,\omega_0 \sqrt{C_1 C_2}} \frac{n^2 - 1}{n} \tan \frac{\pi}{2n} \ . \tag{9}$$

Deze uitdrukking neemt met stijgende n toe en bereikt voor $n \to \infty$ de limietwaarde

$$A_{n=\infty} = \frac{\pi^2}{4\,\omega_0 \sqrt{C_1 C_2}} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}} \cdot \frac{1}{\omega_0 (C_1 + C_2)} \ .$$

De maximaal bereikbare overdracht ligt een factor $\frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_1 C_2}}$ boven de overdracht die men bij $\omega = \omega_0$ met de schadelijke capaciteiten alléén zou verkrijgen. Is $C_1 = C_2$, dan ligt deze maximale overdracht 7,8 dB boven die van de beste tweepool en nog 1,8 dB boven die van de schakeling van fig. 6.

Het toenemen met n in (9) is zo gering, dat men voor $n = 3$ slechts 0,2 dB beneden het maximum blijft.

Bij een practische uitvoering van dit resultaat van Bode zal men zich dus meestal beperken tot $n = 3$. Bovendien zal men nog elementen kunnen sparen door in plaats van een brugschakeling een overbrugde T-cel toe te passen. Hiervoor, en voor de benadering van de krommen van fig. 9 door geschikte

[1]) Zie Appendix III.

impedanties, verwijzen wij naar een uitgewerkt voorbeeld bij Bode[1]).

§ 6.

Aan het slot van deze beschouwingen moeten wij nog opmerken dat wij, en ook Bode, niet hebben aangetoond dat de overdrachtsimpedantie de vorm (5) moet bezitten om tot de grootste overdracht te komen. Wel lijkt het plausibel het beschikbare oppervlak van de functie $|R_{12}|$ te concentreren in de gebruikte band en niet daarbuiten, en dus buiten de gebruikte band een fasedraaiïng van een oneven aantal malen $\frac{\pi}{2}$ voorop te stellen, waardoor wij tot de vorm (5) komen. Geheel overtuigend is dit argument echter niet.

Discussie

Naar aanleiding van vragen van Ir L. Blok en Dr J. Haantjes valt nog op te merken:

De vierpolen die wij bespraken vertonen allen juist aan de rand van de gebruikte band en er buiten grote fasedraaiïngen bijv. van $3\frac{\pi}{2}$. Zij zullen dus moeilijkheden geven in versterkertrappen voor tegengekoppelde versterkers.

Juist doordat wij geen eisen aan de fasedraaiïng hebben gesteld maar alleen een vlak verloop van de modulus hebben verlangd, kunnen wij niet verwachten netwerken te vinden waarvan het inschakelverschijnsel op een eenheidsstoot een voor televisie of radar bruikbaar karakter heeft. De inschakelverschijnselen bij de besproken netwerken zijn verwant met Besselfuncties en hebben dus een zeer slingerend karakter.

Met betrekking tot een vraag van Ir J. F. Klinkhamer moet opgemerkt worden dat Bode over de invloed van eigencapaciteiten van de gebruikte spoelen niet spreekt.

---

[1]) Bode l.c. p. 440.

Appendix I

Voor $\int\limits_{c_2} Z(p)\,dp$ kunnen wij schrijven $\int\limits_{c_2} \left[\frac{B_\infty}{p} + \frac{A_1}{p^2} + \ldots\right] dp$.

Indien wij deze reeks term voor term integreren, heeft elke term een integrand van de vorm $\frac{1}{p^n}$. Langs de weg c_2 mogen wij stellen $p = R\,e^{i\Theta}$, $dp = R\,e^{i\Theta}\,i\,d\Theta$, zodat

$$\int\limits_{c_2} \frac{dp}{p^n} = \int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{R\,e^{i\Theta}}{R^n\,e^{n\,i\Theta}}\,i\,d\Theta = \frac{1}{R^{n-1}} \int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} e^{-(n-1)i\Theta}\,i\,d\Theta .$$

Deze integralen leveren steeds een eindige uitkomst, zodat in de limiet voor $R \to \infty$ het antwoord nul wordt indien $n > 1$.

Voor $n = 1$ vindt men

$$\int\limits_{c_2} \frac{dp}{p} = \int\limits_{\pi/2}^{-\pi/2} i\,d\Theta = -\pi i .$$

Appendix II

Om te komen tot formule (2) moet men de volgende integraal berekenen

$$\int\limits_0^{\omega_0} \frac{\ln \omega}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}}\,\frac{d\omega}{\omega_0} = \int\limits_0^1 \frac{\ln \omega/\omega_0\; d\omega/\omega_0}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}} + \ln \omega_0 \int\limits_0^1 \frac{d\omega/\omega_0}{\sqrt{1 - \omega^2/\omega_0^2}}$$

De tweede integraal hierin, zijnde een $\arcsin(\omega/\omega_0)$, levert $\frac{\pi}{2} \ln \omega_0$. Voor de eerste schrijven wij

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int\limits_0^1 \ln x\,d(\arcsin x) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\left(2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi ,$$

zodat

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln 2 + \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin \frac{\varphi}{2}\,d\varphi + \int\limits_0^{\pi/2} \ln \cos \frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin \alpha \, d\alpha + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos \beta \, d\beta$$

of, met $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$,

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin \alpha \, d\alpha - 2 \int_{\pi/2}^{\pi/4} \ln \sin \gamma \, d\gamma .$$

Wij verkrijgen dus, na omkeren van grenzen en optellen van de integralen,

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi \, d\varphi ,$$

waaruit

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin \varphi \, d\varphi = - \frac{\pi}{2} \ln 2 .$$

Appendix III

Om voor het verkrijgen van formule (9) $\int_0^{\omega_0} |\cos n \varphi| \, d\omega$ te berekenen $\left(\frac{\omega}{\omega_0} = \sin \varphi\right)$, merken wij eerst op dat

$$\int_0^{\omega_0} \cos n \varphi \, d\omega = \omega_0 \int_0^{\pi/2} \cos n \varphi \cos \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{\omega_0}{2} \left\{ \frac{\sin (n+1) \varphi}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \varphi}{n-1} \right\} \Bigg|_0^{\pi/2} .$$

Daar n oneven gekozen is, is $n \pm 1$ even en is dus de uitkomst nul, gelijk ook al op andere gronden in de tekst werd opgemerkt. Om dus de gezochte integraal te vinden, berekenen wij van $\int_0^{\omega_0} \cos n \varphi \, d\omega$ alleen de positieve bijdrage van de integrand en vermenigvuldigen het resultaat met 2. Wij verkrijgen zo:

$$\int_0^{\omega_0} |\cos n\varphi|\, d\omega = \omega_0 \left[\left(\frac{\sin (n+1)\varphi}{n+1} + \frac{\sin (n-1)\varphi}{n-1} \right) \Bigg|_0^{\pi/2n} + \right.$$

$$\left. + \text{(idem)} \Bigg|_{3\pi/2n}^{5\pi/2n} + \text{(idem)} \Bigg|_{7\pi/2n}^{9\pi/2n} + \ldots \text{(idem)} \Bigg|_{\frac{(n-2)\pi}{2n}}^{\pi/2} \right].$$

Hierbij is ondersteld dat n van de vorm is $4k+1$. Is n van de vorm $4k-1$, dan luiden de grenzen bij de laatste term: $\frac{(n-4)\pi}{2n}$ tot $\frac{(n-2)\pi}{2n}$.

Alvorens de grenzen in te vullen, schrijven wij de uitkomst als

$$\frac{\sin (n+1)\varphi}{n+1} + \frac{\sin (n-1)\varphi}{n-1} =$$

$$= \frac{2n}{n^2-1} \sin n\varphi \cos\varphi - \frac{2}{n^2-1} \cos n\varphi \sin\varphi .$$

Wegens de factor $\cos n\varphi$ is de laatste term aan alle grenzen nul behalve voor $\varphi = 0$, waar de factor $\sin\varphi$ gelijk aan nul is. Wij verkrijgen dus voor de gezochte integraal

$$\frac{2n\omega_0}{n^2-1} \left[\sin n\varphi \cos\varphi \Bigg|_0^{\pi/2n} + \text{idem} \Bigg|_{3\pi/2n}^{5\pi/2n} + \text{enz.} \right].$$

Aan de grenzen is nu steeds $\sin n\varphi = \pm 1$ behalve voor $\varphi = 0$, waar $\sin n\varphi = 0$, terwijl $\cos\varphi$ gelijk aan nul wordt aan de grens $\frac{\pi}{2}$.

Wij vinden dus steeds de reeks

$$\frac{2n\omega_0}{n^2-1} \left[\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{3\pi}{2\pi} + \cos\frac{5\pi}{2\pi} + \ldots + \cos\frac{(n-2)\pi}{2n} \right].$$

De som van deze reeks wordt gemakkelijk bepaald (bijv. door vermenigvuldigen van alle termen met $\sin\frac{\pi}{2n}$), waardoor wij komen tot

$$\frac{2n\omega_0}{n^2-1} \cdot \frac{1}{2} \cot\frac{\pi}{2n} = \frac{n\omega_0}{n^2-1} \cot\frac{\pi}{2n},$$

waarmee de uitkomst verkregen is.

Erkenning van opleidingsinstituten

voor radiomonteurs en radiotechnici namens het Nederlands Radiogenootschap.

Het Nederlands Radiogenootschap geeft sedert een aantal jaren gelegenheid tot het afleggen van examens voor radiomonteur en voor radiotechnicus. Het is daarbij gebleken, dat steeds een groot aantal candidaten moet worden afgewezen, terwijl van degenen die slagen velen slechts lage cijfers behalen. Er bestaan aanwijzingen dat de onvoldoende voorbereiding van de candidaten, welke hieruit spreekt, ten dele een gevolg is van het feit, dat er opleidingsinstituten zijn, welke in de uitvoering van hun taak te kort schieten.

Het Nederlands Radiogenootschap heeft daarom besloten de gelegenheid te openen voor opleidingsinstituten welke aan redelijk te stellen eisen voldoen, ter beoordeling van het Genootschap, erkenning namens het Nederlands Radiogenootschap te verkrijgen. Het Genootschap hoopt hiermede te bevorderen, dat het gemiddelde peil der opleidingen wordt verhoogd en daarmee de voorbereiding van de candidaten voor de examens wordt verbeterd.

Het ligt niet in het voornemen in de toekomst alleen leerlingen van erkende opleidingsinstituten tot de examens toe te laten. De examens zullen, zoals ook thans het geval is, voor een ieder toegankelijk blijven.

Leiders van opleidingsinstituten die voor deze erkenning in aanmerking wensen te komen, kunnen zich daartoe wenden tot de secretaris van het Nederlands Radiogenootschap:

Ir J. Piket, Jongeneelstraat 11, Scheveningen.

Het Bestuur van het Nederlands Radiogenootschap.

Voorgestelde leden

Ir A. G. van Doorn. Werkzaam op het Natuurkundig Laboratorium N.V. Philips. Laan van Klarenbeek 126, Arnhem.

Ir A. P. Bolle. Werkzaam bij het Hoofdbestuur der P.T.T. Frankendaal 29, Rotterdam-Z.

Ir J. Verstraten. Werkzaam op het Nat. Laboratorium der N.V. Philips Telecommunicatie Industrie. Trompenbergerweg 7, Hilversum.

Eventuele bezwaren tegen toelating als lid moeten binnen 14 dagen aan de Secretaris van het N.R.G. worden toegezonden.

Verslag van het examen Radiotechnicus en Monteur

gehouden in October, November en December 1949

Het schriftelijk examen Radiotechnicus en Radiomonteur werd gehouden op 17 en 18 October 1949. Aangemeld hadden zich 179 candidaten voor technicus (waarvan teruggetrokken 1) en 217 voor monteur (waarvan teruggetrokken 3). Wegens onvoldoend schriftelijk examen werden afgewezen 65 candidaten technicus en 70 candidaten monteur, zodat voor het mondeling gedeelte werden opgeroepen 113 candidaten technicus en 144 candidaten monteur, welk mondeling examen werd gehouden op 21, 22, 28, 29 November en 8, 9, 19, 20, 21, 28 en 29 December.

Afgewezen werden 62 candidaten technicus (1 candidaat niet opgekomen)

en 56 candidaten monteur (2 candidaten niet opgekomen), terwijl 5 candidaten monteur voor een herexamen in aanmerking werden gebracht.

Geslaagd zijn in totaal 50 candidaten technicus en 83 candidaten monteur. Van de 7 candidaten herexamen monteur slaagden er 6.

De practische toestelkennis en de vaardigheid in het uitvoeren van metingen was bij vele candidaten onvoldoende. In het bijzonder de radiotechnicus moet ervaring bezitten in het opsporen van gebreken in ontvangtoestellen en het uitvoeren van metingen.

Het ligt in het voornemen der examencommissie, de tijdsduur van het mondeling gedeelte uit te breiden tot het in het examen-reglement genoemde maximum. Het gebruikelijke half uur voor de theorie zal worden: een half uur theorie betreffende de wiskunde, de natuurkunde en de theoretische electriciteitsleer, en een half uur theorie der radiotechniek. Het gebruikelijke half uur „practische toestelkennis" zal verlengd worden tot hoogstens 1 uur.

Verder zij er aan herinnerd, dat de gewijzigde exameneisen en examenreglementen bij het eerstvolgende examen van kracht zijn.

Octrooien

Openbaar gemaakt 15 December 1949:

O.A. 128502, kl. 95b1, Bell Telephone. Zender waarbij de modulatie met behulp van een absorptiediode geschiedt, waarbij rendementsverhoging wordt verkregen doordat de door de diode gelijkgerichte hoogfrequente stroom weer naar de anodespanningsbron teruggevoed wordt.

O.A. 81530, kl. 95b1d1, Bell Telephone. Verbetering aan een modulator- of demodulatorketen met vier of meer mazen, waarbij de draaggolf onderdrukt wordt.

O.A. 97922, kl. 95d2c1a, Electrical & Musical Industries. Koppeling tussen twee in cascade geschakelde ontladingsbuizen in een bredebandversterker, waarbij rekening is gehouden met de invloed van de ontkoppelelementen voor de anodespanning en de roosterspanning.

O.A. 111868, kl. 95b3, N.V. Philips. Stelsel voor berichtenoverdracht met behulp van impulsmodulatie, waarbij een verhoogde storingsongevoeligheid is verkregen, doordat iedere impuls herhaald wordt.

O.A. 116754, kl. $21a^{5}5$, Technische Hochschule, Zürich. Werkwijze voor het weergeven van een televisiebeeld met een electronenstraalbuis, voorzien van een oppervlak, waarop een gerasterde ladingsverdeling tot stand wordt gebracht.

O.A. 103724, kl. $21a^{4}gi1$, N.V. Philips. Inrichting voor het opwekken van trillingen met behulp van een ontladingsbuis, welke met snelheidsbesturing werkt en waarbij zowel de frequentie als de amplitude der opgewekte trillingen onafhankelijk van elkaar tussen ruime grenzen kunnen worden gevarieerd.

O.A. 130111, kl. $21a^{49}b$, Westinghouse Electric Corp. Afstembare ultrahoogfrequente magnetrongenerator, waarbij de trilholten op eenvoudige wijze gezamenlijk kunnen worden afgestemd.

He.

Ontvangen Tijdschriften enz.

Journal of the Franklin Institute, Nov., Dec. 1949.
Wireless Engineer, Dec. 1949. Jan. 1950.
Nat. Bureau of Standards, Basic Radio Predictions for Maart April 1950.
Technical News bulletin Vol 33, Nr 11, 1949.
Ericsson Review, Nr 3, 1949.
Annales des Telecommunication, Tome 4. Nrs 10, 11, 12, 1949.
U.R.S.I. Bulletin, Nov.-Dec. 1949.
Radio Revue, Jan., Febr. 1950.
De Ingenieur, Jrg. 61, Nrs 48-52, 1949. Nrs 1-4, 1950.
Tijdschrift voor Radiotechniek, Jrg. 3, Nrs 11-12.