Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

September 1950 **Deel XV No. 4**

De straling van „Beam"-antennes in het bijzonder en grote oppervlakken in het algemeen

door Balth. van der Pol.

De berekening van de straling van „Beam"-antennes geschiedt gewoonlijk door eerst vectorieel de velden op grote afstand van de afzonderlijke draden te adderen en daarna de Poynting-vector over een bol te integreren. Wanneer echter de parallelle draden alle h.f. wisselstroom van gelijke amplitude en phase dragen, en de afstand tussen de draden niet te groot is, kan het probleem aanmerkelijk worden vereenvoudigd door de parallelle draden vervangen te denken door een continue plaat van lengte l en breedte b over welks oppervlakte homogeen verdeeld, een wisselstroom vloeit die overal evenwijdig verloopt aan de lengte l en waarvan de amplitude i_0 per strekkende lengte-eenheid zódanig is gekozen dat de totale stroom $J_0 = b\, i_0$ over de breedte gelijk is aan de som van de stromen in alle draden die zich op de breedte b bevinden.

Wanneer deze rechthoekige plaat zich in de vrije ruimte bevindt en de oorsprong van het coördinaten stelsel wordt in het hart van de plaat gedacht, zal de electrische veld componente E_Θ op grote afstand, in de gebruikelijke notatie, gegeven worden door

$$E_\Theta = \frac{-jk}{c} i_0 \sin\Theta \frac{e^{j(kr-\omega t)}}{r} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} e^{-jk(z'\cos\Theta + x'\sin\Theta\cos\varphi)}\, dx'\, dz' =$$

$$= -\frac{jk}{c} i_0 \sin\Theta \frac{e^{j(kr-\omega t)}}{r} \left\{ \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\cos\Theta\right)}{k\cos\Theta} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\sin\Theta\cos\varphi\right)}{k\sin\Theta\cos\varphi} \right\} =$$

$$= -\frac{jk}{c} i_0 \sin\Theta \frac{e^{j(kr-\omega t)}}{r} K(\Theta, \varphi)$$

waarin $K(\Theta, \varphi)$ de uitdrukking tussen accoladen samenvat

terwijl $\alpha = k\,l\,, \beta = k\,b$ en $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

De totale straling P van deze plaat wordt dan

$$P = \frac{k^2}{2c} - i_{eff}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} K^2(\Theta, \varphi) \sin^3\Theta\, d\Theta\, d\varphi$$

of, wanneer P in Watts en i_{eff} in Ampère per cm. wordt uitgedrukt,

$$P_{Watts} = 15\, k^2\, i_{eff}^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} K^2(\Theta, \varphi) \sin^3\Theta\, d\Theta\, d\varphi$$

$$= 15\, k^2\, i_{eff}^2\, H(\alpha, \beta) \tag{1}$$

waarin

$$H(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} K^2(\Theta, \varphi) \sin^3\Theta\, d\Theta\, d\varphi\,. \tag{2}$$

Zijn de lengte en breedte van de plaat klein ten opzichte van de golflengte ($\alpha << 1$, $\beta << 1$) dan wordt

$$K(\Theta, \varphi) \approx lb$$

$$H(\alpha, \beta) \approx \frac{4}{3} l^2 b^2$$

$$\text{en } P_{Watts} \approx 15\, k^2\, i_{eff}^2\, \frac{4}{3} l^2 b^2 = 80\, \pi^2\, J_{eff}^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2,$$

de bekende uitdrukking voor de straling van een korte antenne.

De algemene uitdrukking (2) voor H blijkt voor aanmerkelijke

vereenvoudiging vatbaar. Men vindt (bijv. na omrekening via een Bessel functie)

$$H(\alpha, \beta) = \frac{8}{k^2} \int_0^{\beta} (\beta - t) \int_0^{\alpha} (\alpha - s) \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \frac{\sin \sqrt{s^2 + t^2}}{\sqrt{s^2 + t^2}} \, ds \, dt \qquad (3)$$

De formules (1), (2), en (3) stellen ons nu in staat (eventueel asymptotische) approximaties te vinden voor verschillende combinaties van α en β. Aldus blijken de volgende benaderingen te gelden

(a) $P \approx 60\, b^2\, i_{eff}^2 \left\{ \alpha\, Si(\alpha) + \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha - 2 \right\}$, ($\beta \to 0$, α willekeurig)

(b) $P \approx 30\, l^2\, i_{eff}^2 \left\{ \beta\, Si(\beta) - \frac{\sin \beta}{\beta} + \cos \beta \right\}$, ($\alpha \to 0$, β willekeurig)

(c) $P \approx 30\, \pi\, k\, l\, b^2\, i_{eff}^2 = 60\, \pi^2\, J_{eff}^2\, \frac{l}{\lambda}$, ($\beta \to 0$, $\alpha \to \infty$)

(d) $P \approx 15\, \pi\, k\, b\, l^2\, i_{eff}^2 = 30\, \pi^2\, J_{eff}^2 \frac{l^2}{b\, \lambda}$, ($\alpha \to 0$, $\beta \to \infty$)

(e) $P \approx 20\, k^2\, b^2\, l^2\, i_{eff}^2 = 80\, \pi^2\, J_{eff}^2 \frac{l^2}{\lambda^2}$, ($\alpha \to 0$, $\beta \to 0$)

(f) $P \approx 60\, \pi\, b l\, i_{eff}^2 = 60\, \pi\, S'\, i_{eff}^2$. ($\alpha \to \infty$, $\beta \to \infty$)

In deze uitdrukkingen is P uitgedrukt in Watts terwijl i_{eff} en $J_{eff} = b\, i_{eff}$ in Ampères zijn gegeven. Verder is $Si(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx$, terwijl S' de oppervlakte bl van onze plaat voorstelt.

Beschouwen we thans (a) . . . . (f) nader. Het geval (e) werd boven reeds aangegeven en vertegenwoordigt de bekende uitdrukking voor de straling van een korte antenne (d.w.z. kort ten opzichte van de golflengte).

Het geval (a) vertegenwoordigt een dunne draad met een stroom $b\, i_{eff} = J_{eff}$, waarbij deze stroom verondersteld is dezelfde amplitude te hebben over de gehele lengte $l = \alpha/k$, en waarbij deze lengte een willekeurige waarde kan hebben. Wordt

deze lengte groot genomen dan bevinden we ons in het geval (c) waaruit blijkt, dat voor één lange draad met een homogene stroomverdeling de straling evenredig is aan de lengte van de draad, in tegenstelling met het geval (e) (korte draad) waar de straling evenredig is aan het kwadraat van de lengte. Het geval (b) betreft een smalle metalen band met een korte afmeting in de richting van de stroom, waarbij de lengte van de band (hier: b) willekeurig is. Is deze smalle band tevens zeer lang (b groot), dan komen we in het geval (d) hetwelk ons leert dat, indien de stroom per cm. constant gedacht wordt, de straling van deze band evenredig is aan zijn lengte (hier: b), analoog aan het geval (c) (lange draad) waar we zagen dat de straling ook evenredig was aan zijn lengte.

Het meest interessante geval is wel (f), waar we te doen hebben met een grote rechthoekige plaat, in de zin dat beide afmetingen groot zijn ten opzichte van de golflengte.

De (asymptotische) uitdrukking (f) leert ons n.l. dat voor een grote plaat waarin de homogene stroomverdeling i_{eff} constant gehouden gedacht wordt, de totale straling onafhankelijk is van de golflengte, en evenredig is aan de oppervlakte $S' = bl$ van de plaat.

Hieruit kan de practische conclusie worden getrokken dat, wanneer we een grote beam-antenne verder vergroten door er steeds meer draden aan toe te voegen die elk dezelfde stroom voeren, de straling toeneemt evenredig aan de oppervlakte van de antenne.

Er is echter hierbij nog een détailpunt dat verdere physische overweging verdient. Bij beschouwing van een enkele draad zal de straling zich naar alle zijden uitbreiden, en hetzelfde geldt wanneer we meerdere draden parallel hebben. Laten we nu elk van die draden zich verbreden tot banden in het vlak van de antenne dan zullen de tussenruimten steeds nauwer worden en op het laatst zullen de banden aan elkaar sluiten tot één massieve plaat. Is deze plaat groot genoeg, en konden wij het bereiken dat de oppervlakte stromen alléén aan de éne zijde van de plaat zouden lopen, dan zou praktisch de straling alleen zich voordoen aan die zijde van de plaat waar de stromen lopen, terwijl aan de andere zijde geen veld zou worden gevonden. Wij hebben in het bovenstaande echter φ geintegreerd van 0 tot 2π, dus stilzwijgend vooronderstelt dat de stroom i_{eff} per strekkende cm. half aan de ene zijde en half aan de andere zijde van de grote plaat loopt. Aan elke zijde loopt dus eigenlijk een stroom $\frac{1}{2} i_{eff}$ die we willen noemen i^*_{eff}.

Tevens hebben wij de oppervlakte S' van de plaat gedefinieerd als bl, waarbij we eigenlijk slechts één zijde van de plaat in rekening hebben gebracht. Daar de plaat echter twee zijden heeft is de totale oppervlakte daarvan $S = 2\,S'$. Voeren we derhalve de genoemde uitdrukkingen i^*_{eff} en S in (f) in, dan verkrijgen we

$$P_{Watts} \approx 60\,\pi \frac{S}{2} (2\,i^*_{eff})^2 = 120\,\pi\,S\,i^{*\,2}_{eff}\,, \tag{f'}$$

waarin derhalve i^*_{eff} de stroom per strekkende cm. is, zoals we die vinden aan elk der beide zijden van de plaat, terwijl S de totale oppervlakte voorstelt.

Het ligt voor de hand de uitdrukking (f') te generaliseren voor een lichaam van willekeurige vorm dat groot gedacht is ten opzichte van de golflengte. De uitdrukking (f') leert ons dan dat, wanneer over de gehele oppervlakte van het lichaam een stroom i^*_{eff} per strekkende cm. overal in phase en met dezelfde amplitude en in dezelfde „richting" loopt, de totale straling van dit lichaam evenveel vermogen vertegenwoordigt als de verwarming zou bedragen (zonder straling) wanneer dat lichaam een „oppervlakte weerstand" had van 120 π Ohm. Het is merkwaardig dat men hier dezelfde waarde vindt als die van $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ van de vrije ruimte[1]). Beide vermogens, de straling en de verwarming, zijn *onder de gegeven omstandigheden evenredig aan de oppervlakte,* hetgeen ook geinterpreteerd kan worden door te zeggen dat elk „deel" van de oppervlakte een straling afgeeft onafhankelijk van elk ander deel daarvan.

Genève, Febr. 1950.

---

[1]) Zie bijv.: O. Heaviside, Electromagnetic Theory III, 332 (1902) Benn Brothers Ltd., London; herdruk 1922.
J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, 601, Mc. Graw Hill, New York, 1941.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

De krachten tussen twee stroomgeleiders

door B. D. H. Tellegen

SUMMARY

The forces between two steady currents can be conceived of as the resultant of fictitious attracting forces and fictitious couples that the elements of current exert on one another; the attracting forces being proportional to the scalar product of the current elements divided by the square of their distance; the couples being proportional to the vector product of the current elements divided by their distance.

In dit artikel willen wij de krachten onderzoeken welke twee gesloten stroomgeleiders, 1 en 2, op elkaar uitoefenen, indien daarin de gelijkstromen i_1 en i_2 vloeien.

Volgens de wet van Biot en Savart[1]) bedraagt de magnetische inductie $\overline{B}$ die veroorzaakt wordt door de stroom i_2

$$\overline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \oint_2 \frac{\overline{dl_2} \times \overline{R}}{R^3}. \tag{1}$$

Hierin is $\overline{dl_2}$ een lijnelement van stroomgeleider 2, opgevat als vector met de richting van i_2, $\overline{R}$ de radiusvector van dit lijnelement naar het punt waarin wij $\overline{B}$ willen bepalen, μ_0 de absolute permeabiliteit van het vacuum (wij gebruiken gerationaliseerde Giorgi-eenheden).

De kracht welke hierdoor op het lijnelement $\overline{dl_1}$ van stroomgeleider 1, met de richting van i_1, wordt uitgeoefend, bedraagt[2])

$$\overline{dK} = i_1 \, \overline{dl_1} \times \overline{B}, \tag{2}$$

of met (1)

[1]) Zie bijv. G. J. Elias, Theorie van het electromagnetisch veld I, blz. 220, verg. (25).

[2]) Elias, l.c. blz. 260, verg. (99).

$$\overline{dK} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \overline{dl_1} \times \oint_2 \frac{\overline{dl_2} \times \overline{R}}{R^3}. \tag{3}$$

De kracht welke de stroom i_2 uitoefent op het stroomelement $i_1 \overline{dl_1}$ kan men dus opvatten als de som van een aantal componenten, afkomstig van de verschillende stroomelementen $i_2 \overline{dl_2}$, ten bedrage van

$$\overline{d^2 K} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\overline{dl_1} \times (\overline{dl_2} \times \overline{R})}{R^3}. \tag{4}$$

Voor twee evenwijdige, gelijkgerichte stroomelementen welke loodrecht staan op hun verbindingslijn leidt dit tot een onderlinge aantrekkingskracht van de grootte

$$d^2 K = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{dl_1\, dl_2}{R^2}, \tag{5}$$

terwijl twee evenwijdige stroomelementen welke op hun verbindingslijn liggen geen krachten op elkaar uitoefenen.

De krachtsuitdrukking (4), opgesteld door Grassmann, is niet symmetrisch in $\overline{dl_1}$ en $\overline{dl_2}$, zodat de wet van actie gelijk reactie hiervoor in het algemeen niet geldt. Het is echter mogelijk uitdrukking (4) te vervangen door een uitdrukking waarvoor deze wet wel geldt en welke bij integratie langs stroomgeleider 2 leidt tot dezelfde waarde voor de kracht welke de stroom i_2 op het stroomelement $i_1 \overline{dl_1}$ uitoefent, dus tot de waarde gegeven door (3). Dit is de krachtsuitdrukking van Ampère[1]):

$$\overline{d^2 K} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \overline{R} \left\{ \frac{2\, \overline{dl_1} \cdot \overline{dl_2}}{R^3} - \frac{3\, (\overline{dl_1} \cdot \overline{R})\, (\overline{dl_2} \cdot \overline{R})}{R^5} \right\}. \tag{6}$$

Voor twee evenwijdige, gelijkgerichte stroomelementen leidt dit tot een onderlinge aantrekkingskracht van de dubbele grootte van (5), indien de stroomelementen loodrecht staan op hun verbindingslijn. Neemt de hoek tussen de stroomelementen en hun verbindingslijn af, dan neemt de aantrekkingskracht af,

---

[1]) Voor de afleiding van (6) uit (4) zie bijv. H. Diesselhorst, artikel Elektrodynamik in Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus, Band IV, blz. 1287; ook afzonderlijk verschenen onder de titel: Magnetische Felder und Kräfte. Historisch is de uitdrukking van Ampère de oudste; Grassmann heeft zijn uitdrukking daaruit afgeleid.

wordt bij een bepaalde hoek nul en verandert daarna in een afstotende kracht, welke tenslotte de waarde (5) bereikt als de stroomelementen op hun verbindingslijn liggen. Wegens dit eigenaardige verband en de betrekkelijke gecompliceerdheid van uitdrukking (6) heeft de krachtsuitdrukking van Ampère zijn belang verloren en is thans alleen nog van historische betekenis.

Onderzoeken wij alleen de krachten welke de stroomgeleiders als geheel op elkaar uitoefenen zonder te vragen naar de werkelijke krachten op de stroomelementen afzonderlijk, dan kunnen wij wel uitdrukkingen afleiden voor de krachten tussen twee stroomelementen welke eenvoudig zijn en waarvoor de wet van actie gelijk reactie geldt. Daartoe gaan wij van de krachten welke de stroom i_2 op de stroom i_1 uitoefent de resulterende kracht en het resulterende moment ten opzichte van een willekeurig punt berekenen.

Om de resulterende kracht te berekenen gaan wij uit van uitdrukking (4) en integreren deze zowel langs de eerste als langs de tweede stroomgeleider. Wij splitsen (4) in twee stukken met behulp van

$$\overline{dl}_1 \times (\overline{dl}_2 \times \overline{R}) = \overline{dl}_2 (\overline{dl}_1 \,.\, \overline{R}) - \overline{R} (\overline{dl}_1 \,.\, \overline{dl}_2) \,. \tag{7}$$

Om het aandeel van de eerste term van het rechterlid van (7) in de resulterende kracht te vinden beginnen wij met langs de eerste stroomgeleider te integreren; wij moeten dus berekenen

$$\oint_1 \frac{\overline{dl}_1 \,.\, \overline{R}}{R^3} = - \oint_1 \overline{dl}_1 \,.\, grad \frac{1}{R} = - \oint_1 dl_1 \frac{d\, 1/R}{dl_1} = 0 \,.$$

De eerste term van het rechterlid van (7) levert dus geen aandeel in de resulterende kracht.

De tweede term van het rechterlid van (7) geeft aanleiding tot een resulterende kracht

$$\overline{K} = - \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(\overline{dl}_1 \,.\, \overline{dl}_2)\, \overline{R}}{R^3} \,. \tag{8}$$

Daar de integrand symmetrisch is in $\overline{dl}_1$ en $\overline{dl}_2$ en de richting van $\overline{R}$ heeft, kan men deze kracht opvatten als de som van een aantal aantrekkingskrachten tussen de stroomelementen $i_1 \overline{dl}_1$ en $i_2 \overline{dl}_2$ ten bedrage van

$$d^2K = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\overline{dl_1} \,.\, \overline{dl_2}}{R^2} \,. \tag{9}$$

Voor twee evenwijdige, gelijkgerichte stroomelementen heeft deze aantrekkingskracht de grootte van (5). Deze kracht hangt nu echter niet meer af van de hoek die de stroomelementen met hun verbindingslijn maken. De kracht is nul als de stroomelementen loodrecht op elkaar staan.

Om het resulterende moment van de krachten ten opzichte van een willekeurig punt O te berekenen duiden wij elk punt aan door de radiusvector $\overline{R}_0$ uit O naar dit punt getrokken. De eerste term van het rechterlid van (7) geeft dan aanleiding tot een moment

$$\overline{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 R_0 \times \frac{\overline{dl_2}\,(\overline{dl_1} \,.\, \overline{R})}{R^3} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_2 \overline{dl_2} \times \oint_1 \frac{\overline{R_0}\,(\overline{dl_1} \,.\, \overline{R})}{R^3}, \tag{10}$$

waarin wij weer eerst langs de eerste stroomgeleider integreren. Nu is

$$(\overline{dl_1} \,.\, \nabla) \frac{\overline{R_0}}{R} = \overline{R_0} \left(\overline{dl_1} \,.\, grad \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} (\overline{dl_1} \,.\, \nabla) \overline{R_0} \,.$$

Met

$$grad \frac{1}{R} = -\frac{\overline{R}}{R^3} \quad \text{en} \quad (\overline{dl_1} \,.\, \nabla) \overline{R_0} = \overline{dl_1} \,,$$

welke laatste gelijkheid direct blijkt door tot de coördinatenschrijfwijze over te gaan, komen wij dus tot

$$-\oint_1 \frac{\overline{R_0}\,(\overline{dl_1} \,.\, \overline{R})}{R^3} + \oint_1 \frac{\overline{dl_1}}{R} = \oint_1 (\overline{dl_1} \,.\, \nabla) \frac{\overline{R_0}}{R} = \oint_1 dl_1 \frac{d\,(\overline{R_0}/R)}{dl_1} = 0 \,.$$

Daarmee gaat (10) over in

$$\overline{M} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{\overline{dl_1} \times \overline{dl_2}}{R} \,. \tag{11}$$

Daar $\overline{R}_0$ hier niet meer in voorkomt, kan men dit moment opvatten als de som van de momenten van een aantal koppels welke de stroomelementen $i_2\, \overline{dl_2}$ op de stroomelementen $i_1\, \overline{dl_1}$

uitoefenen ten bedrage van

$$\overline{d^2 M} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{\overline{dl_1} \times \overline{dl_2}}{R} . \tag{12}$$

De tweede term van het rechterlid van (7) geeft aanleiding tot een moment dat men kan opvatten als afkomstig van de aantrekkingskrachten (9) tussen de stroomelementen en voegt dus niets toe aan de gevonden krachten en koppels.

Daar het koppel (12) van teken omdraait als $\overline{dl_1}$ en $\overline{dl_2}$ verwisseld worden, oefent $i_1 \overline{dl_1}$ op $i_2 \overline{dl_2}$ het tegengestelde koppel uit. Het koppel is het grootst als de stroomelementen loodrecht op elkaar staan en nul als zij evenwijdig zijn. Het heeft de tendens de stroomelementen evenwijdig en gelijkgericht te maken.

Bij vergelijking van (9) met (12) valt nog op dat de kracht omgekeerd evenredig met R^2 en het koppel omgekeerd evenredig met R is, zodat bij kleine afstand de invloed van de kracht, bij grote afstand de invloed van het koppel zal overwegen. Tevens blijkt uit (9) en (12) duidelijk dat voor de krachten tussen twee stroomgeleiders de wet van actie gelijk reactie geldt.

Wij kunnen het resultaat als volgt samenvatten:

De krachten welke twee stroomgeleiders op elkaar uitoefenen kan men opvatten als de resultante van schijnbare aantrekkende krachten tussen de stroomelementen $i_1 \overline{dl_1}$ en $i_2 \overline{dl_2}$, gegeven door (9), en van schijnbare koppels welke de stroomelementen $i_2 \overline{dl_2}$ op de stroomelementen $i_1 \overline{dl_1}$ uitoefenen, gegeven door (12), waarin R de onderlinge afstand van de stroomelementen is.

Velden in en om holten in een magneticum, hierop werkende ponderomotorische krachten in een magnetisch veld bij electrische stroom in de holte en het bij beweging van de holte optredende electrische veld

door J. P. Schouten

SUMMARY

Some general propositions are given concerning the electromagnetic field in a slot moving in a homogeneous medium in which an arbitrary external magnetic field is maintained.

It is proved that the total electric field in the slot, moving in a homogeneous external field is independent of the inhomogenity caused by the wall of the slot and of the size and the shape of the slot. The mechanical forces exerted on the slot and electric currents flowing in the slot are also given consideration. It is proved that the total mechanical force can be calculated just as if the given current field flowed in the homogeneous medium in the given external field, independent of size and shape of the slot.

In de eerste paragrafen van het achtste hoofdstuk van „Theorie van het Electromagnetische Veld", waarmede prof. Elias een prachtig Nederlands handboek op dit gebied heeft geschapen, komen beschouwingen voor omtrent de in een geleider met cirkelvormige dwarsdoorsnede (permeabiliteit = 1) opgewekte electrische veldsterkte bij eenparige beweging loodrecht op de lengterichting van de cylinder in een homogeen uitwendig magnetisch veld. (blz. 187, 8.12 van genoemd werk) Daarbij heeft het omringende medium een van 1 afwijkende permeabiliteit μ. Prof. Elias maakt aannemelijk, dat het in de geleider optredende electrische veld kan worden berekend onder negatie van de door de geleider in het magnetisch veld ver-

oorzaakte inhomogeniteit. Hiermede hangt samen het in § 8.151 op blz. 201 behandelde probleem betreffende de ponderomotorische kracht werkende op een stroomgeleider in een boring binnen een magnetisch medium. Voor het bijzondere geval van een cirkelvormige geleider wordt aangetoond, dat deze kracht dezelfde is als voor het geval, dat het magnetische veld door de boring niet was vervormd.

In de navolgende beschouwingen zal een streng bewijs worden geleverd voor hiermede verband houdende algemene stellingen. In de eerste plaats zullen we bewijzen, dat de beide hierboven vermelde stellingen voor cirkelvormige boringen, eveneens gelden voor boringen met willekeurige dwarsdoorsnede bij willekeurige waarde van de permeabiliteit van het homogene medium in de boring. Uit de gang van het bewijs blijkt, dat het mogelijk is ook stellingen uit te spreken voor het geval, dat het uitwendige veld niet homogeen is. Voor de krachten, werkende op stromen in holten kan zelfs worden bewezen, dat de stelling geldt voor een niet homogeen uitwendig veld voor een willekeurige stroomverdeling binnen de holte.

Voor de te voeren bewijzen zijn voorbereidingen nodig en wordt tevens van een aantal stellingen uit de veldentheorie gebruik gemaakt. Voor de minder bekende zijn in het bijgevoegde aanhangsel de bewijzen kort aangeduid en de meer bekende slechts vermeld.

De voorbereidingen hebben hoofdzakelijk betrekking op de relaties der velden, welke optreden om en in een holte met homogeen medium (permeabiliteit μ_2) in een homogeen magnetisch medium met permeabiliteit μ_1.

Voor zover de schrijver bekend, zijn de vermelde stellingen en bewijzen nieuw.

1. *Velden in en om een holte in een magneticum.*

We beschouwen een homogeen medium met permeabiliteit μ_1 en daarin heersend een magnetisch veld $\overline{H}_u$. Omtrent de bronnen en/of wervels van $\overline{H}_u$ veronderstellen we slechts dat ze buiten het beschouwde gebied liggen.

De hiermede samenhangende electromagnetische inductie kan dan gevonden worden uit de betrekking:

$$\overline{B}_u = \mu_1 \overline{H}_u \tag{1}$$

In het medium wordt nu een holte gemaakt, gevuld met een

medium met permeabiliteit μ_2. Hierdoor wordt het veld $\overline{H}_u$ verstoord. De dan optredende velden in media 1 en 2 geven we resp. aan met: $\overline{H}_1$, $\overline{B}_1$, $\overline{H}_2$, $\overline{B}_2$. Hiervoor geldt:

$$\overline{B}_1 = \mu_1 \overline{H}_1 \qquad \overline{B}_2 = \mu_2 \overline{H}_2 \tag{2}$$

Op grote afstanden van de holte, doch nog binnen het beschouwde medium moet gelden:

$$\overline{H}_1 \rightarrow \overline{H}_u \qquad \overline{B}_1 \rightarrow \overline{B}_u$$

Verder moeten de velden $\overline{B}_1$, $\overline{H}_1$, $\overline{B}_2$ en $\overline{H}_2$ voldoen aan de continuïteitsvoorwaarden op het grensvlak tussen de media 1 en 2, d.i. de wand van de holte.

Noemen we de eenheidsvector $\overline{n}$ in elk punt van de wand positief in de richting van 2 naar 1, dan geldt voor de electromagnetische inductie:[1])

$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{of} \quad \overline{B}_1 . \overline{n} = \overline{B}_2 . \overline{n}$$

of

$$\overline{n} . (\overline{B}_1 - \overline{B}_2) = 0 \tag{3}$$

Verder moet de tangentiële component van $\overline{H}$ continu door genoemd grensvlak gaan, hetgeen voert tot de voorwaarde:

$$\overline{n} \times (\overline{H}_1 - \overline{H}_2) = 0 \quad \text{of} \quad \overline{n} \times \overline{H}_1 = \overline{n} \times \overline{H}_2 \tag{4}$$

Daar steeds geldt: $\nabla . \overline{B} = 0$ en door de homogeniteit van de media daarin ook steeds $\nabla \times \overline{B} = 0$ moeten de wervels van $\overline{B}$ gezocht worden op het grensvlak van de media 1 en 2. We vinden dus, dat het $\overline{B}$-veld ($\overline{B}_2$ binnen de holte, $\overline{B}_1$ er buiten) bepaald wordt door een oppervlakte-wervellaag. Dit is een gevolg van het feit, dat de tangentiële component van het $\overline{B}$-veld aan het grensvlak een sprong vertoont.

De wervelsterkte bedraagt, zoals bekend:

$$\overline{K} = \overline{n} \times (\overline{B}_1 - \overline{B}_2) \tag{5}$$

Het door deze wervels veroorzaakte veld noemen we in medium 1: $\overline{B}_{i1}$ en in medium 2: $\overline{B}_{i2}$ en dit veld denken we ons gesuperponeerd op het oorspronkelijk aanwezige $\overline{B}$-veld, dat is $\overline{B}_u$. Dan moet dus gelden:

$$\overline{B}_1 = \overline{B}_u + \overline{B}_{i1} , \qquad \overline{B}_2 = \overline{B}_u + \overline{B}_{i2} \tag{6}$$

---

[1]) De in het volgende gebezigde vergelijkingen zijn alle geschreven in het gerationaliseerde eenheden-stelsel volgens Giorgi.

Dat de vergelijkingen (6) juist zijn, zal nog blijken, als we trachten het $\overline{H}$-veld te berekenen.

Voor $\overline{K}$ uit (5) kunnen we met behulp van (2) en (4) schrijven:

$$\overline{K} = \overline{n} \times (\mu_1 \overline{H}_1 - \mu_2 \overline{H}_2) = \mu_1 \overline{n} \times \overline{H}_1 - \mu_2 \overline{n} \times \overline{H}_2 = \overline{n} \times \overline{H}_2 (\mu_1 - \mu_2) =$$

$$\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} \overline{n} \times \overline{B}_2 \tag{7}$$

Met behulp van bekende stellingen uit de vector-analyse kunnen we nu schrijven:

$$\overline{B}_{i1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \times \int_o \frac{\overline{n} \times \overline{B}_2}{r} d\,o \quad \text{(stelpunt in medium 1)} \tag{8}$$

waarbij de integratie over de wand van de holte is uitgestrekt en ∇_p aangeeft, dat de differentiaties naar het stelpunt P moeten worden uitgevoerd. Op dezelfde wijze geldt:

$$\overline{B}_{i2} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \times \int_o \frac{\overline{n} \times \overline{B}_2}{r} d\,o \quad \text{stelpunt in medium 2)} \tag{9}$$

Met behulp van de stelling van Gausz (vergelijking (A – 3) in het aanhangsel) kunnen we nu (8) en (9) herleiden door de oppervlakte-integraal om te zetten in een volume-integraal en daarbij rekening te houden met het feit, dat in medium 2 geldt: $\nabla \times \overline{B}_2 = 0$. We vinden dan:

$$\overline{B}_{i2} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \times \int_{holte} \left(\nabla_o \times \frac{\overline{B}_2}{r} \right) dV = \frac{\mu_1 - \mu_2}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \times \int_{holte} \left(\nabla_o \frac{1}{r} \right) \times \overline{B}_2 dV$$

(∇_o geeft differentiaties naar de integratie-variabelen aan)

Verder is: $\left(\nabla_o \frac{1}{r} \right) = - \left(\nabla_p \frac{1}{r} \right)$, dus:

$$\overline{B}_{i2} = - \frac{\mu_1 - \mu_2}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \times \int_V \left(\nabla_p \frac{1}{r} \right) \times \overline{B}_2 dV = - \frac{\mu_1 - \mu_2}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \times \left(\nabla_p \times \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV \right) \tag{10}$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1}{4 \pi \mu_2} \nabla_p \left(\nabla_p \cdot \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV \right) - \frac{\mu_2 - \mu_1}{4 \pi \mu_2} \left(\nabla_p^2 \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV \right) \tag{11}$$

Krachtens de stelling van Poisson geldt:

$$\nabla_p^2 \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV = -4\pi \overline{B}_2 \qquad \text{(stelpunt in medium 2!)},$$

zodat we tenslotte vinden:

$$\overline{B}_{i2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_2} \nabla_p \left(\nabla_p . \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV \right) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \overline{B}_2 \tag{12}$$

Voor $\overline{B}_{i1}$ verloopt de herleiding op analoge wijze, doch daar thans het stelpunt in medium 1 ligt en de integratie over de holte (medium 2) wordt uitgestrekt, levert de stelling van Poisson thans:

$$\nabla_p^2 \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV = 0 \text{, zodat}$$

$$\overline{B}_{i1} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_2} \nabla_p \left(\nabla_p . \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV \right) \tag{13}$$

(12) en (13) werden afgeleid uit (4) en (5), dus met behulp van de wervellaag van $\overline{B}$.

Het $\overline{H}$-veld kan nu worden verkregen uit de optredende divergentielaag met behulp van (3).

Voor de divergentiesterkte σ in de laag geldt:

$$\sigma_m = \overline{n} . (\overline{H}_1 - \overline{H}_2) \tag{14}$$

dus
$$\sigma_m = \overline{n} . \left(\frac{\overline{B}_1}{\mu_1} - \frac{\overline{B}_2}{\mu_2} \right) = \frac{1}{\mu_1} \overline{n} . \overline{B}_1 - \frac{1}{\mu_2} \overline{n} . \overline{B}_2$$

$$= \overline{n} . \overline{B}_2 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) = \overline{n} . \overline{B}_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 \mu_2} . \tag{15}$$

Noemen we de in medium 1, resp. 2 optredende magnetische veldsterkte ten gevolge van de divergentielaag resp. $\overline{H}_{i1}$ en $\overline{H}_{i2}$, dan geldt:

$$\overline{H}_{i1} = -\nabla_p \int_O \frac{\sigma_m \, dO}{4\pi r} \qquad \text{(stelpunt in medium 1)} \tag{16}$$

$$\overline{H}_{i2} = -\nabla_p \int_O \frac{\sigma_m \, dO}{4\pi r} \qquad \text{(stelpunt in medium 2)} \tag{17}$$

Met behulp van (15) zijn (16) en (17) als volgt te herleiden:

$$\overline{H}_{i1} = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1\mu_2} \nabla_p \int_o \frac{\overline{n} \cdot \overline{B}_2}{r} d\,o$$

$$= -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1\mu_2} \nabla_p \int_V \left(\nabla_o \cdot \frac{\overline{B}_2}{r}\right) d\,V = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1\mu_2} \nabla_p \int_V \left(\nabla_p \frac{1}{r}\right) \cdot \overline{B}_2\, d\,V$$

$$= \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_1\mu_2} \nabla_p \left(\nabla_p \cdot \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} dV\right) \qquad \text{(stelpunt in medium 1)} \qquad (18)$$

Voor $\overline{H}_{i2}$ geldt dezelfde uitdrukking met het stelpunt in 2. Met behulp van (18) kunnen nu (12) en (13) worden herleid:

$$\left.\begin{aligned} \overline{B}_{i1} &= \mu_1 \overline{H}_{i1} \quad \text{en} \\ \overline{B}_{i2} &= \mu_1 \overline{H}_{i2} + (\mu_2 - \mu_1)\overline{H}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Daar tenslotte: $\overline{H}_2 = \overline{H}_u + \overline{H}_{i2}$ vinden we:

$$\overline{B}_{i2} = \mu_1 \overline{H}_{i2} + (\mu_2 - \mu_1)(\overline{H}_u + \overline{H}_{i2}) = \mu_2 \overline{H}_{i2} + (\mu_2 - \mu_1)\overline{H}_u$$

$$= \mu_2 (\overline{H}_{i2} + \overline{H}_u) - \mu_1 \overline{H}_u = \mu_2 \overline{H}_2 - \mu_1 \overline{H}_u = \overline{B}_2 - \overline{B}_u$$

of

$$\overline{B}_2 = \overline{B}_{i2} + \overline{B}_u .$$

Hiermede wordt dus de tweede vergelijking van (6) bevestigd.

Stellen we, ter vereenvoudiging van de schrijfwijze:

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\overline{B}_2}{r} d\,V = pot_v\, \overline{B}_2$$

dan kunnen we voor (12) met behulp van (6) schrijven:

$$\overline{B}_{i2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} grad\, div\, pot_v\, \overline{B}_2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} (\overline{B}_{i2} + \overline{B}_u)$$

of:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \overline{B}_{i2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} grad\, div\, pot_v\, (\overline{B}_{i2} + \overline{B}_u) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2} \overline{B}_u$$

$$\overline{B}_{i2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} grad\, div\, pot_v\, (\overline{B}_{i2} + \overline{B}_u) + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} \overline{B}_u$$

$$\overline{B}_{i2} - \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} grad\, div\, pot_v\, \overline{B}_{i2} = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} grad\, div\, pot_v\, \overline{B}_u + \\ + \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1} \overline{B}_u \tag{21}$$

(21) is een integro-differentiaalvergelijking waardoor $\overline{B}_{i2}$ wordt vastgelegd bij gegeven veld $\overline{B}_u$.

Voor het geval, dat $\overline{B}_u$ een homogeen veld voorstelt en de holte de vorm van een tweede-graads oppervlak (ellipsoïde en ontaardingen) heeft, kan met behulp van (21) het veld $\overline{B}_{i2}$ worden berekend. Voor andere gevallen zal het probleem wel op grote mathematische moeilijkheden stuiten.

§ 2. *Het electrische veld in een holte, indien deze zich met een constante snelheid $\overline{w}$ beweegt.*

Vanzelfsprekend wordt verondersteld, dat de snelheid zo gering is ten opzichte van de lichtsnelheid, dat het veld in en om de bewegende holte op ieder ogenblik voldoet aan de in § 1 afgeleide betrekkingen voor stilstaande holte.

De, op een proeflading in de holte werkende, kracht wordt bepaald (bij afwezigheid van electrische ladingen) door de Lorentz-kracht en door de electrische veldsterkte welke volgt uit de inductiewet.

Voor de Lorentzkracht per eenheid van lading geldt:

$$\overline{K}_L = \overline{w} \times \overline{B}_2 \tag{22}$$

De inductiewet luidt:

$$\nabla \times \overline{F} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \tag{23}$$

en geldt voor elk stilstaand coördinaten-systeem.

De totale kracht per eenheid van lading wordt dus:

$$\overline{K} = \overline{w} \times \overline{B}_2 + \overline{F} \tag{24}$$

Onder $\overline{B}$ in (23) hebben we te verstaan de totale in een bepaald punt van het vaste coördinaten-systeem optredende electro-magnetische inductie.

$\overline{B}$ is dus het veld, dat in de holte wordt voorgesteld door $\overline{B}_2$ en daarbuiten door $\overline{B}_1$.

We kunnen dus stellen (zie (6) § 1):

$$\overline{B} = \overline{B}_u + \overline{B}_i \tag{25}$$

waarbij $\overline{B}_i$ samenvalt met $\overline{B}_{i2}$ in de holte en met $\overline{B}_{i1}$ daarbuiten.

Het totale $\overline{B}$-veld is dus ontstaan door superpositie van twee velden, $\overline{B}_u$ en $\overline{B}_i$, waarbij $\overline{B}_u$ afkomstig is van, buiten het beschouwde gebied gelegen, stilstaande wervels en $\overline{B}_i$ veroorzaakt wordt door de discontinuïteiten aan het grensvlak van de holten. Dit laatste $\overline{B}_i$-veld beweegt dus met de holte mede en kan daarbij, daar omtrent $\overline{B}_u$ niets is verondersteld, van gedaante veranderen, doch voldoet op elk moment aan de in § 1 afgeleide betrekkingen.

We merken op, dat voor het geval, dat $\overline{B}_u$ een homogeen veld zou zijn, $\overline{B}_i$ in onveranderlijke gedaante met de holte medebeweegt.

Na deze voorbereiding kunnen we nu vaststellen:

1)
$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{B}_u}{\partial t} + \frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t} \tag{26}$$

2) Stellen we voor een met de holte meebewegend coördinaten stelsel de verandering van $\overline{B}_i$ per tijdseenheid voor door $\frac{d\overline{B}_i}{dt}$ (rechte d's!) dan geldt, zoals we gemakkelijk inzien:

$$\frac{d\overline{B}_i}{dt} = \frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t} + (\overline{w} \,.\, \nabla)\, \overline{B}_i$$

3) Daar $\overline{w}$ constant is en $\nabla \,.\, \overline{B}_i = 0$ kan voor de laatst gevonden uitdrukking ook worden geschreven:

$$\frac{d\overline{B}_i}{dt} = \frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t} + \nabla \times (\overline{B}_i \times \overline{W})$$

of
$$\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t} = \frac{d\overline{B}_i}{dt} - \nabla \times (\overline{B}_i \times \overline{W}) \tag{27}$$

4) Hiermede wordt dus (23):

$$\nabla \times \overline{F} = -\frac{\partial \overline{B}_u}{\partial t} - \frac{d\overline{B}}{dt} + \nabla \times (\overline{B}_i \times \overline{w}) \tag{28}$$

5) Verandert $\overline{B}_u$ niet met de tijd en is dit veld bovendien homogeen, dan is $\frac{\partial \overline{B}_u}{\partial t} = 0$ en $\frac{d\overline{B}_i}{dt} = 0$, $\nabla \times \overline{F} = \nabla \times (\overline{B}_i \times \overline{w})$ en dus, daar geen electrische ladingen aanwezig zijn:

$$\overline{F} = \overline{B}_i \times \overline{w}, \text{ dus in de holte } \overline{F} = \overline{B}_{i2} \times \overline{w}.$$

Dan geeft (24)

$$\overline{K} = (\overline{w} \times \overline{B}_2) + \overline{B}_{i2} \times \overline{w} = \overline{w} \times \overline{B}_u \qquad (29$$

Dit is dezelfde kracht per eenheid van lading (veldsterkte) als in het geval, dat in het geheel geen holte aanwezig is.

6) Verandert $\overline{B}_u$ niet met de tijd en is dit veld niet homogeen, dan is $\frac{\partial \overline{B}_u}{\partial t} = 0$ en $\frac{d\overline{B}_i}{dt} \neq 0$ en dus

$$\nabla \times \overline{F} = -\frac{d\overline{B}_i}{dt} + \nabla \times (\overline{B}_i \times \overline{W})$$

Dan wordt $\overline{K} = \overline{W} \times \overline{B}_u + \overline{F}^1$, waarbij $curl\, \overline{F}^1 = -\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial t}$ (30)

7) Men kan zonder veel moeite aantonen, dat (27) eveneens geldt voor een roterend systeem, indien we onder $\frac{d\overline{B}_i}{dt}$ verstaan de verandering van $\overline{B}_i$ per tijdseenheid ten opzichte van een mederoterend coördinatensysteem. Het bewijs hiervan in extenso zou echter te veel plaatsruimte vergen en wordt derhalve achterwege gelaten.

§ 3. *De pondero-motorische kracht, werkende op een holte, liggend in een uitwendig veld $\overline{H}_u$ ($\overline{B}_u$), indien in de holte een electrisch stromingsveld $\overline{s}$ bestaat.*

Bestaat in de holte een stromingstoestand, welke we weergeven met de stroomdichtheidsvector $\overline{s}$, dan ligt het voor de hand, de in media 1 en 2 optredende velden $\overline{B}$ en $\overline{H}$ in drie delen te splitsen.

Omtrent het magnetische veld $\overline{H}$ kunnen we zeggen, dat dit uiteenvalt in $\overline{H}_u$, het uitwendige magnetische veld, het veld $\overline{H}_{i1}$, afkomstig van het discontinuïteitsvlak, zijnde het grensvlak tussen

de media 1 en 2 en tenslotte het veld $\overline{H}_s$, afkomstig van de stromingstoestand in de holte. Voor de media 1 en 2 gelden dus (met voor de hand liggende notatie)

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_u + \overline{H}_{i1} + \overline{H}_{s1} \qquad \overline{H}_2 = \overline{H}_u + \overline{H}_{i2} + \overline{H}_{s2}$$

$$\nabla \times \overline{H}_1 = \nabla \times \overline{H}_{s1} = 0 \qquad \nabla \times \overline{H}_2 = \nabla \times \overline{H}_{s2} = \overline{s}$$

$$\begin{aligned} \overline{B}_1 &= \mu_1 \overline{H}_1 & \overline{B}_2 &= \mu_2 \overline{H}_2 = \mu_2 \overline{H}_u + \mu_2 \overline{H}_{i2} + \mu_2 \overline{H}_{s2} \\ &= \mu_1 \overline{H}_u + \mu_1 \overline{H}_{i1} + \mu_1 \overline{H}_{s1} & &= \mu_1 \overline{H}_u + (\mu_2 - \mu_1) \overline{H}_u + \mu_2 \overline{H}_{i2} + \mu_2 \overline{H}_{s2} \\ &= \overline{B}_u + B_{i1} + \overline{B}_{s1} & &= \overline{B}_u + \overline{B}_{i2} + \overline{B}_{s2} \end{aligned} \tag{31}$$

De pondero-motorische kracht, werkende op de stroming in de holte: $\overline{K}_{ps}$ wordt gevonden uit:

$$\overline{K}_{ps} = \int_V (\overline{s} \times \overline{B}_2)\, dV \tag{32}$$

De pondero-motorische kracht per eenheid van oppervlak van het grensvlak kan worden gevonden met behulp van de Maxwell'se spanningstensor.

Stellen we:

$$\begin{aligned} \overline{T}_1 &= \overline{H}_1 (\overline{n} \,.\, \overline{B}_1) - \tfrac{1}{2} \overline{n} (\overline{H}_1 \,.\, \overline{B}_1) \\ \overline{T}_2 &= \overline{H}_2 (\overline{n} \,.\, \overline{B}_2) - \tfrac{1}{2} \overline{n} (\overline{H}_2 \,.\, \overline{B}_2) \end{aligned} \tag{33}$$

dan is de pondero-motorische kracht per eenheid van oppervlak: $(\overline{T}_1 - \overline{T}_2)$ en dus de totale pondero-motorische kracht op het oppervlak:

$$\int_o (\overline{T}_1 - \overline{T}_2)\, do$$

De totale pondero-motorische kracht op holte plus grensvlak kan dus worden bepaald door de uitdrukking:

$$\overline{K}_p = \int_V (\overline{s} \times \overline{B}_2)\, dV + \int_o (\overline{T}_1 - \overline{T}_2)\, do \tag{34}$$

We beschouwen eerst: $\int_o \overline{T}_2\, do$. Met behulp van (33) herleiden we deze integraal als volgt:

$$\int_o \overline{T}_2\, do = \int_o \left\{ \overline{H}_2 (\overline{n} \,.\, \overline{B}_2) - \tfrac{1}{2} \overline{n} (\overline{H}_2 \,.\, \overline{B}_2) \right\} do$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_o \left\{ \overline{H}_2 (\overline{n} \,.\, \overline{B}_2) + \overline{B}_2 (\overline{n} \,.\, \overline{H}_2) - \overline{n} (\overline{H}_2 \,.\, \overline{B}_2) \right\} do$$

Met behulp van $(A - 7)$ (zie aanhangsel) kan deze oppervlakte-integraal worden omgezet in een volume-integraal. We vinden:

$$\int_{o} \overline{T}_2 \, d\,o = \tfrac{1}{2}\int_V \left\{ (\nabla \times \overline{H}_2) \times \overline{B}_2 + (\nabla \times \overline{B}_2) \times \overline{H}_2 + \overline{H}_2 (\nabla \,.\, \overline{B}_2) + \overline{B}_2 (\nabla \,.\, \overline{H}_2) \right\} d\,o$$

$$= \int_V (\overline{s} \times \overline{B}_2) \, d\,V \tag{35}$$

Dit gesubstitueerd in (34) geeft:

$$\overline{K}_p = \int \overline{T}_1 \, d\,o \tag{36}$$

hetgeen we ook onmiddellijk hadden kunnen vinden door te bedenken, dat (36) de pondero-motorische kracht op holte en grensvlak tezamen voorstelt.

Het komt er nu verder op aan. de uitdrukking voor (35) te herleiden.

Nu wordt $\overline{T}_1$ door (33) gegeven en daarin kunnen we de waarden voor $\overline{H}_1$ en $\overline{B}_1$, zoals deze door (31) worden gegeven, substitueren. dus:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{T}_1 &= (\overline{H}_u + \overline{H}_{i1} + \overline{H}_{s1}) \left\{\overline{n} \,.\, (\overline{B}_u + \overline{B}_{i1} + \overline{B}_{s1})\right\} - \tfrac{1}{2}\overline{n}\left\{\overline{H}_u + \overline{H}_{i1} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \overline{H}_{s1}) \,.\, (\overline{B}_u + \overline{B}_{i1} + \overline{B}_{s1})\right\} \\
&= \left\{\overline{H}_u (\overline{n} \,.\, \overline{B}_u) - \tfrac{1}{2}\overline{n}(\overline{H}_u \,.\, \overline{B}_u)\right\} + \left\{\overline{H}_{i1}(\overline{n} \,.\, \overline{B}_{i1}) - \tfrac{1}{2}\overline{n}(\overline{H}_{i1} \,.\, \overline{B}_{i1})\right\} + \left\{\overline{H}_{s1}(\overline{n} \,.\, \overline{B}_{s1}) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \tfrac{1}{2}\overline{n}(\overline{H}_{s1} \,.\, \overline{B}_{s1})\right\} \\
&+ \left\{\overline{H}_u (\overline{n} \,.\, \overline{B}_{i1}) + \overline{H}_{i1}(\overline{n} \,.\, \overline{B}_u) - \tfrac{1}{2}\overline{n}(\overline{H}_u \,.\, \overline{B}_{i1} + \overline{H}_{i1} \,.\, \overline{B}_u)\right\} + \left\{\overline{H}_u (\overline{n} \,.\, \overline{B}_{s1}) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \overline{H}_{s1}(\overline{n} \,.\, \overline{B}_u) - \tfrac{1}{2}\overline{n}(\overline{H}_u \,.\, \overline{B}_{s1} + \overline{H}_{s1} \,.\, \overline{B}_u)\right\} \\
&+ \left\{\overline{H}_{i1}(\overline{n} \,.\, \overline{B}_{s1}) + \overline{H}_{s1}(\overline{n} \,.\, \overline{B}_{i1}) - \tfrac{1}{2}\overline{n}(\overline{H}_{i1} \,.\, \overline{B}_{s1} + \overline{H}_{s1} \,.\, \overline{B}_{i1})\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

De oppervlakte-integraal van $\overline{T}_1$ over het grensvlak valt op deze wijze uiteen in zes delen, waarvan alleen het vijfde deel een van nul verschillende waarde zal blijken op te leveren.

Om dit te bewijzen merken we in de eerste plaats op, dat we het oppervlak, waarover we $\int_o \overline{T}_1 \, d\,o$ bepalen willekeurig mogen laten uitzetten, mits slechts het grensvak tussen de media 1 en 2 er geheel binnen blijft. Dit is het geval, indien we aantonen, dat $\int_o \overline{T}_1 \, d\,o$ over een oppervlak, zó gekozen, dat het hierdoor omvatte volume geheel in medium 1 ligt, de waarde nul oplevert. Nu is, daar medium 1 homogeen is en in dit medium zowel $\nabla \times \overline{H}_1 = o$ als $\nabla \,.\, \overline{H}_1 = o$:

$$\int_{o} \overline{T}_1 \, d\,o = \int_{o} \{\overline{H}_1 (\overline{n} \,.\, \overline{B}_1) - \tfrac{1}{2}\, \overline{n} (\overline{H}_1 \,.\, \overline{B}_1)\} \, d\,o = \mu_1 \int_{o} \{\overline{H}_1 (\overline{n} \,.\, \overline{H}_1) - \tfrac{1}{2}\, \overline{n} (\overline{H}_1^2)\} \, d\,o$$

$$= \mu_1 \int_{V} \{(\nabla \times \overline{H}_1) \times \overline{H}_1 + (\nabla \,.\, \overline{H}_1)\, \overline{H}_1\} \, d\,V = o$$

Bij de laatste overgang is van stelling ($A - 8$) gebruik gemaakt.

Dat de eerste term van (37) nul oplevert, zien we, los van de laatste opmerking, direct in door te bedenken, dat $\overline{B}_u$ in medium 1 én 2 gedefiniëerd is door de betrekking $\overline{B}_u = \mu_1 \overline{H}_u$ en stelling ($A - 8$) toe te passen. Daar zowel $\nabla \times \overline{H}_u = o$ als $\nabla \,.\, \overline{H}_u = o$ is in het beschouwde gebied, levert de volume-integraal derhalve de waarde nul.

Dat de tweede term nul opleveren moet, is op physische gronden zeer plausibel, daar het de kracht voorstelt, welke de oppervlakte-divergentielaag van het $\overline{H}$-veld op het grensvlak op zichzelf uitoefent. Mathematisch zien we dit in, door het vlak, waarover we integreren, zodanig uit te zetten, dat alle punten hiervan op afstanden van de holte komen te liggen, groot ten opzichte van de afmetingen van de holte. Uit (18) volgt, dat $|\overline{H}_{i2}| < \dfrac{A}{R^3}$ indien R de gemiddelde afstand van een bepaald punt van het integratie-oppervlak tot de holte voorstelt en A een van R onafhankelijke grootheid. Daar de oppervlakte van het integratie-oppervlak (b.v. een grote bol met middelpunt in de holte) evenredig met R^2 stijgt, geldt voor de integraal van de tweede term, dat deze voor toenemende R evenredig met $1/R^4$ afneemt.

Hiertegenover staat, dat de integraal van de tweede term bij het uitzetten van het integratievlak niet veranderen kan, daar $\nabla \times \overline{H}_{i1} = o$ en $\nabla \,.\, \overline{H}_{i1} = o$ (in medium 1), derhalve heeft bedoelde integraal de waarde nul.

Analoge overwegingen en schattingen leiden tot de conclusie, dat ook de derde, vierde en zesde term van (37) de waarde nul opleveren.

We komen dus tot het resultaat, dat de gezochte ponderomotorische kracht gevonden kan worden uit:

$$\overline{K}_{ps} = \int_{o} \{\overline{H}_u (\overline{n} \,.\, \overline{B}_{s1}) + \overline{H}_{s1} (\overline{n} \,.\, \overline{B}_u) - \tfrac{1}{2}\, \overline{n} (\overline{H}_u \,.\, \overline{B}_{s1} + \overline{H}_{s1} \,.\, \overline{B}_u)\} \, d\,o \qquad (38)$$

Daar in medium 1 geldt: $\overline{B}_{s1} = \mu_1 \overline{H}_{s1}$ en $\overline{B}_u = \mu_1 \overline{H}_u$ kan hiervoor ook geschreven worden:

$$\overline{K}_{ps} = \int_{o} \{\overline{B}_u (\overline{n} \,.\, \overline{H}_{s1}) + \overline{H}_{s1} (\overline{n} \,.\, \overline{B}_u) - \overline{n} (\overline{B}_u \,.\, \overline{H}_{s1})\} \, d\,o \qquad (39)$$

en krachtens stelling $(A-7)$:

$$\overline{K}_{ps} = \int_V \{ (\nabla \times \overline{B}_u) \times \overline{H}_{s1} + (\nabla \times \overline{H}_{s1}) \times \overline{B}_u + \overline{B}_u (\nabla \,.\, \overline{H}_{s1}) + \\ + \overline{H}_{s1} (\nabla \,.\, \overline{B}_u) \} \, d\, V \,. \tag{40}$$

Daar nu $\nabla \times \overline{B}_u = 0$, $\nabla \,.\, \overline{H}_{s1} = 0$, $\nabla \,.\, \overline{B}_u = 0$ en $\nabla \times \overline{H}_{s1} = \overline{s}$ vinden we ten slotte:

$$\overline{K}_{ps} = \int_V (\overline{s} \times \overline{B}_u) \, d\, V \,. \tag{41}$$

Daar alleen in de holte een stroming optreedt, kan de volume-integraal tot de holte worden beperkt.

We zien dus, dat we voor $\overline{K}_{ps}$ dezelfde waarde krijgen, als *die, welke op zou treden, indien geen inhomogeniteit aan het grensvlak van de holte aanwezig ware.*

Men zou, de gehele bewijsvoering overziende, de tegenwerping kunnen maken, dat in die gevallen, waarin de wervels van $\overline{B}_u$ tamelijk dicht bij de holte liggen, men voor de vierde term het integratie-oppervlak niet onbepaald kan laten uitzetten, zonder wervels van $\overline{B}_u$ te passeren. Nader onderzoek leert echter, dat, indien $\overline{B}_u$ in de holte homogeen is, men, zonder van dit uitzetten gebruik te maken, kan aantonen, dat de bijdrage van de vierde term nul oplevert. We zullen dit hier niet verder vervolgen.

Aanhangsel.

α. De stelling van Gausz in verschillende gedaanten.

De in § 3 gebezigde integraal-theorema's steunen alle op de stelling van Gausz.

Voor een scalar-veld geldt:

$$\int_{o} \bar{n}\, p\, do = \int_{V} (\nabla p)\, dV \qquad (A-1)$$

Kiezen we voor p achtereenvolgens a_1, a_2 en a_3 (kentallen van vector-veld $\bar{a} = a_1 \bar{i}_1 + a_2 \bar{i}_2 + a_3 \bar{i}_3$), vermenigvuldigen beide leden van elk der vergelijkingen scalair met resp $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$ en $\bar{i}_3$ en tellen we op, dan komt er:

$$\int_{o} \bar{n} \,.\, \bar{a}\, do = \int_{V} (\nabla \,.\, \bar{a})\, dV \qquad (A-2)$$

Vermenigvuldigen we de vergelijkingen vectorisch (rechts) met respectievelijk $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$ en $\bar{i}_3$, dan geldt:

$$\int_{o} \bar{n} \times \bar{a}\, do = \int_{V} (\nabla \times \bar{a})\, dV \qquad (A-3)$$

Stellen we in $(A-2)$: $\bar{a} = q\bar{p}$, dan moet:

$$\int_{o} q\, (\bar{n} \,.\, \bar{p})\, do = \int_{V} (\bar{p} \,.\, \nabla)\, q\, dV + \int_{V} q\, (\nabla \,.\, \bar{p})\, dV \qquad (A-4)$$

Indien voor q achtereenvolgens genomen wordt q_1, q_2 en q_3 dan geeft vermenigvuldiging met resp. i_1, i_2 en i_3 en optellen:

$$\int_{o} \bar{q}\, (\bar{n} \,.\, \bar{p})\, do = \int_{V} (\bar{p} \,.\, \nabla)\, \bar{q}\, dV + \int_{V} \bar{q}\, (\nabla \,.\, \bar{p})\, dV \qquad (A-5)$$

β. Integraaltheorema's, van belang voor krachtwerking

$$\bar{a} \times (\nabla \times \bar{b}) = \nabla_b (\bar{a} \,.\, \bar{b}) - (\bar{a} \,.\, \nabla)\, b$$

$$\bar{b} \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla_a (\bar{a} \,.\, \bar{b}) - (\bar{b} \,.\, \Delta)\, a$$

$$\bar{a} \times (\nabla \times \bar{b}) + \bar{b} \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla\, (\bar{a} \,.\, \bar{b}) - (\bar{a} \,.\, \nabla)\, \bar{b} - (\bar{b} \,.\, \nabla)\, \bar{a} \qquad (A-6)$$

$$\int_{V} \{\bar{a} \times (\nabla \times \bar{b}) + \bar{b} \times (\nabla \times \bar{a})\}\, dV = \int_{V} \nabla\, (\bar{a} \,.\, \bar{b})\, dV - \int_{V} (\bar{a}\, \nabla)\, \bar{b}\, dV - \int_{V} (\bar{b} \,.\, \nabla)\, \bar{a}\, dV$$

Herleiding met behulp van $(A-1)$ en $(A-5)$ geeft voor het tweede lid:

$$\int_{o} \bar{n}(\bar{a}.\bar{b})\,do - \int_{o} \bar{b}(\bar{n}.\bar{a})\,do + \int_{V} \bar{b}(\nabla.\bar{a})\,dV - \int_{o} \bar{a}(\bar{n}.\bar{b})\,do + \int_{V} \bar{a}(\nabla.\bar{b})\,dV$$

$$\therefore \int_{V} \{(\nabla \times \bar{b}) \times \bar{a} + (\nabla \times \bar{a}) \times \bar{b}\}\,dV + \int_{V} \{\bar{a}(\nabla.\bar{b}) + \bar{b}(\nabla.\bar{a})\}\,dV$$

$$= \int \{\bar{b}(\bar{n}.\bar{a}) + \bar{a}(\bar{n}.\bar{b}) - \bar{n}(\bar{a}.\bar{b})\}\,do \qquad (A-7)$$

Voor $\bar{a} = \bar{b}$ gaat $(A-7)$ over in:

$$\int_{V} \{(\nabla \times \bar{a}) \times \bar{a} + (\nabla.\bar{a})\,\bar{a}\}\,dV = \int_{o} \{\bar{a}(\bar{n}.\bar{a}) - \tfrac{1}{2}\bar{n}(\bar{a}^2)\}\,do \quad (A-8)$$

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

De inwendige weerstand van een penthode

door J. L. H. Jonker

SUMMARY

The phenomena determining the internal resistance of a pentode are studied. For output pentodes the electrostatic influence of the anode voltage on the cathode current appears to be the main cause. For high-frequency pentodes two further causes are

1° the primary electrons which are repelled in the neighbourhood of the suppressor-grid wires and absorbed by the screen grid, and

2° the reflected electrons from the anode which can pass the suppressor grid and reach the screen grid.

As both phenomena depend on the electrode voltages, the current distribution between screen grid and anode is affected by anode-voltage variation.

Een van de vele fundamentele onderzoekingen van Prof. Elias is geweest zijn berekening van het electrostatische veld van een triode. In verschillende publicaties over de werking van electronenbuizen is nadien van deze berekening, direct of indirect, gebruik gemaakt. Dit is eveneens het geval in de volgende analyse van de verschijnselen die tezamen de inwendige weerstand van een penthode bepalen.

Inleiding

Volgens definitie is de inwendige weerstand van een penthode

$$R_i = \left(\frac{\partial V_a}{\partial I_a}\right)_{V_{1,2,3}\ \text{constant}},$$

waarin V_a de anodespanning, $V_{1,2,3}$ de spanning van de verschillende roosters, genummerd van de kathode af, en I_a de anode-

stroom is. Zou de kathodestroom I_k zich in een vaste verhouding over de schermrooster en de anode verdelen, zodat $I_a = p\, I_k$, dan zou dus

$$\frac{1}{R_i} = p \frac{\partial I_k}{\partial V_a}$$

zijn. Bij verandering van V_a verandert echter de potentiaalverhouding in de buis, waardoor ook de stroomverdeling p een functie wordt van V_a. Dan is

$$\frac{\partial I_a}{\partial V_a} = p \frac{\partial I_k}{\partial V_a} + I_k \frac{\partial p}{\partial V_a} .$$

We kunnen dus de inwendige weerstand beschouwen als te zijn samengesteld uit een deel dat veroorzaakt wordt door de verandering van de kathodestroom ten gevolge van de electrostatische doordringing in het vlak van de stuurrooster, en uit een deel dat ontstaat door de verandering in de stroomverdeling:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_{i,\,el.\,st.}} + \frac{1}{R_{i,\,str.\,v.}} .$$

Verandering in de stroomverdeling van de primaire electronen bij verandering van de anodespanning kan ontstaan 1° door verandering van het aantal primaire electronen dat de schermrooster direct treft, 2° door verandering van het aantal electronen dat vóór de remrooster omkeert en door de schermrooster wordt opgenomen en 3° door verandering van het aantal gereflecteerde electronen van de anode dat de remrooster kan passeren en door de schermrooster wordt opgenomen. We zullen eerst de eerste term aan een onderzoek onderwerpen.

I. *De invloed van de electrostatische doordringing*

De electrostatische doordringing van de anode in de eerste rooster is gedefinieerd als

$$D_{a1} = -\left(\frac{\partial V_1}{\partial V_a}\right)_{I_k \text{ constant}}$$

en de kathodesteilheid als

$$S_k = \left(\frac{\partial I_k}{\partial V_1}\right)_{V_a \text{ constant}} .$$

Hieruit volgt

$$\frac{1}{R_{i,\,el.\,st.}} = p \frac{\partial I_k}{\partial V_a} = p\, D_{a1} \frac{\partial I_k}{\partial V_1} = p\, D_{a1}\, S_k \approx D_{a1}\, S_a .$$

De $R_{i,el.st.}$ van een buis kan dus bepaald worden door het meten van de anodesteilheid S_a en het berekenen van D_{a1} uit de geometrie der electroden. Hiertoe maakt men gebruik van een van de bekende formules voor de doordringing D van een massieve electrode in een rooster [1]), benevens van de formule [2]) voor de effectieve potentiaal V_e in een rooster gelegen tussen twee andere electroden. Voor rooster 2 gelegen tussen de roosters 1 en 3 luidt deze laatste

$$V_{e2} = \frac{V_2 + D_{12}\, V_{e1} + D_{32}\, V_{e3}}{1 + D_{12} + D_{32}}.$$

Voor een penthode krijgt men dan voor de drie roosters drie vergelijkingen met als drie onbekenden V_{e1}, V_{e2} en V_{e3}. Hieruit kan men V_{e1} oplossen uitgedrukt in V_1, V_2, V_3, V_a en de verschillende D's. D_{a1} vinden we hieruit door V_1 naar V_a te differentiëren, waarbij we V_{e1} constant houden (I_k constant). Na enig omwerken wordt dit

$$D_{a1} = \frac{D_{21}\, D_{32}\, D_{a3}}{(1 + D_{23} + D_{a3})(1 + D_{12} + D_{32}) - D_{32}\, D_{23}}.$$

In enkele gevallen, waar de D's $<< 1$ zijn, kan men dit vereenvoudigen tot

$$D_{a1} \approx \frac{D_{21}\, D_{32}\, D_{a3}}{1 + D_{12} + D_{23} + D_{32} + D_{a3}} \approx D_{21}\, D_{32}\, D_{a3}.$$

Op deze wijze is de $R_{i,el.st.}$ berekend voor enige eindpenthoden en voor enige hoogfrequentpenthoden voor ontvangdoeleinden en vergeleken met de gemeten R_i (zie tabel I).

Tabel I

	V_1	V_2	V_a	S_a	I_a	$R_{i,el.st.}$	R_i gemeten
EL 3	— 6 V	250 V	250 V	9 mA/V	36 mA	60000 Ω	50000 Ω
EL 50	— 35 V	425 V	400 V	4 mA/V	22,5 mA	49500 Ω	50000 Ω
EF 50	— 2 V	250 V	250 V	6,5 mA/V	10 mA	6,1 MΩ	1 MΩ
EF 6	— 2 V	100 V	200 V	1,8 mA/V	3 mA	13,6 MΩ	2 MΩ
AF 7	— 2 V	100 V	250 V	2,1 mA/V	3 mA	16,8 MΩ	2 MΩ

Hieruit volgt, dat bij eindpenthoden de R_i voornamelijk bepaald wordt door de $R_{i,el.st.}$. Bij hoogfrequentpenthoden blijkt

het effect der stroomverdeling te overheersen. Wij zullen nu de verschillende effecten die tot deze stroomverdeling kunnen bijdragen aan een onderzoek onderwerpen.

II. *Directe stroomopneming van de schermrooster*

Afhankelijk van de lading van de roosterdraden zullen de banen van de electronen, die zich in de richting van een rooster begeven, van de roosterdraden af of naar de roosterdraden toe worden gebogen. De directe stroomopneming van een schermrooster uit de kathodestroom hangt dus van de lading der roosterdraden af en deze verandert door verandering van de anodepotentiaal. Indien we de zijdelingse afbuigingen in de eerste rooster verwaarlozen, kan de directe stroomopneming van een vlakke schermrooster berekend worden met behulp van de betrekking [3])

$$I_2 = I_k \frac{2\,c}{d} \sqrt{\frac{V_2}{V_{e2}}} \left(1 - \frac{V_{e2} - V_2}{2\,V_{e2} \ln \frac{d}{2\,\pi\,c}} \right),$$

(d = spoed, c = straal roosterdraad).

De effectieve potentiaal V_{e2} in de schermrooster kunnen we berekenen volgens de boven aangegeven wijze. Hieruit volgt

$$\frac{dV_{e2}}{dV_a} = \frac{D_{32}\,D_{a3}}{(1 + D_{12} + D_{32})\,(1 + D_{23} + D_{a3})}\,.$$

Toeneming van de stroom naar de schermrooster gaat ten koste van de anodestroom en omgekeerd, zodat de inwendige weerstand die hierdoor ontstaat gevonden kan worden uit

$$\frac{1}{R_{i,\,str.v.I}} = -\frac{dI_2}{dV_a} = -\frac{dI_2}{dV_{e2}} \cdot \frac{dV_{e2}}{dV_a} =$$

$$= \frac{D_{32} \,.\, D_{a3} \,.\, I_k \,.\, \frac{c}{d} \,.\, \sqrt{\frac{V_2}{V_{e2}^3}}}{(1 + D_{12} + D_{32})\,(1 + D_{23} + D_{a3})} \left(1 - \frac{V_{e2} - 3\,V_2}{2\,V_{e2} \ln \frac{d}{2\,\pi\,c}} \right).$$

Voor de EF50, de EF 6 en de AF 7 vinden we op deze wijze bij de instelling volgens tabel I een $R_{i,\,str.v.I}$ gelijk aan resp. 64, 77,5 en 72,5 M Ω, waaruit blijkt, dat dit verschijnsel slechts een onbelangrijke bijdrage levert tot de inwendige-weerstandcomponent ten gevolge van de stroomverdeling.

III. *Stroomverdeling door electronen, die vóór de draden van de remrooster terugkeren*

Als de electronen de schermrooster gepasseerd zijn, komen ze voor de remrooster. Een vlakke rooster, gelegen tussen een vlakke schermrooster en een vlakke anode, kan nu een electronenstroom, die zich van de schermrooster naar de anode begeeft, sturen op de volgende wijze. Wordt de rooster negatief gemaakt, dan ontstaan om de roosterdraden delen van het potentiaalveld, die negatief zijn t.o.v. de kathode. Deze delen zijn voor electronen ondoordringbaar. Bij meer negatieve potentiaal zal het positieve deel van het potentiaalveld tussen de

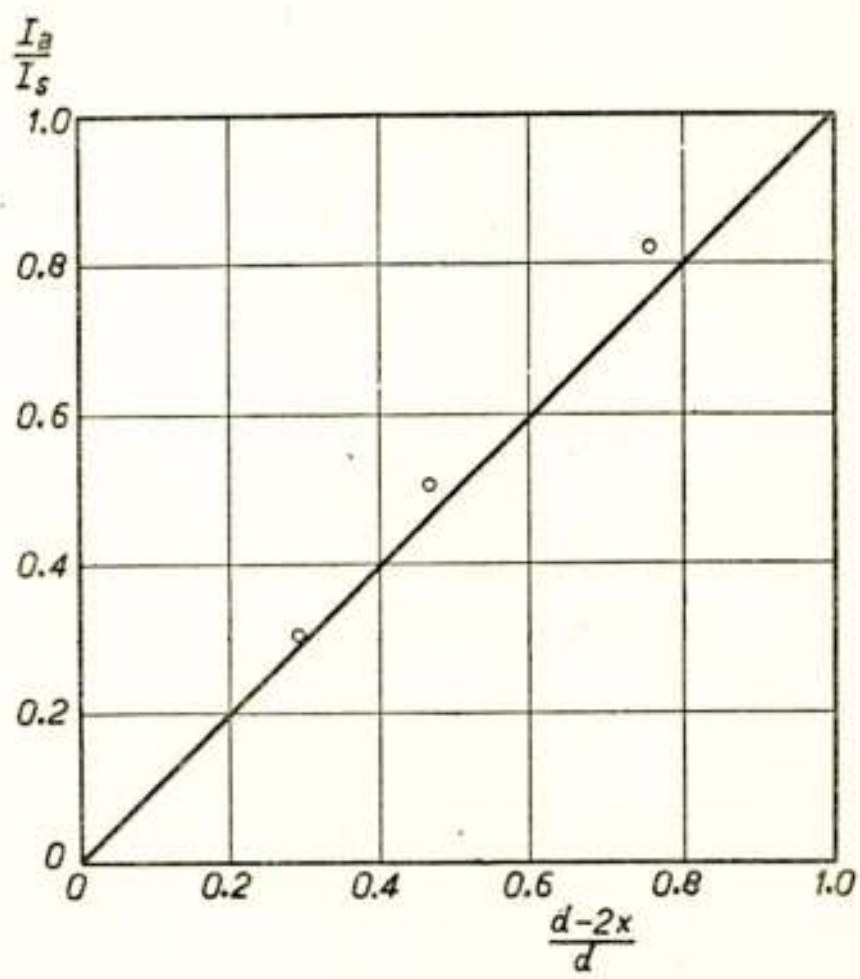


Fig. 1.

Metingen op het rubbervel ter contrôle van de bij de berekening gemaakte onderstelling $I_a/I_s = (d - 2\,x_0)/d$.

roosterdraden kleiner worden, waardoor een kleiner deel van de electronen die zich naar deze rooster begeven, zal worden doorgelaten. Is de veldsterkte aan beide zijden van de rooster gelijk, dan zal, zoals uit metingen met het rubbervel blijkt (fig. 1), van de aankomende electronenstroom I_s het deel I_a dat wordt doorgelaten practisch recht evenredig zijn met de breedte van het positieve deel $(d - 2\,x_0)$ van het potentiaalveld, gelegen in het vlak van de rooster (d = spoed, $2\,x_0$ = negatief deel)[4]).

Een remrooster bevindt zich echter steeds op kathodepotentiaal, zodat op deze wijze geen sturing kan plaatsvinden. De electronenstroom I_s evenwel passeert, gerekend van de kathode

af, de stuur- en de schermrooster. In deze roosters worden de electronen uit hun baan afgebogen[3]). Ze verliezen dus snelheid in de richting van de remrooster. Voor de doorgang door de remrooster is het voor deze electronen als stond de rooster op een negatieve potentiaal, zodat een deel teruggestuurd wordt. Door verandering van de anodespanning verandert ook het potentiaalveld in de remrooster, waardoor het aantal teruggestuurde electronen verandert. Er vindt hierdoor een verandering in de stroomverdeling plaats, die we nader zullen onderzoeken.

Teneinde deze stroomverdeling te kunnen berekenen moeten we het electrostatische veld van een rooster kennen. Hiertoe gaan we uit van de in de aanhef genoemde berekening van Elias[5]), waarin van een cylindrische triode met een rooster bestaande uit aequidistante ringen wordt berekend de potentiaal V van een punt buiten de roosterdraad:

$$V = -4\pi R B_0 \ln R + 2\pi^2 i R \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\frac{2\pi n x}{d} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n R}{d}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n r}{d}\right) -$$

$$-4\pi\varrho b_0 \ln r + 2\pi^2 i \varrho \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{2\pi n x}{d} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{d}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n \varrho}{d}\right) -$$

$$-2\frac{Q_0}{d}\ln R_0 + \frac{2\pi i Q_0}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n x}{d} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{d}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{d}\right) + C.$$

Hierin zijn ϱ, R_0 en R de stralen van resp. gloeidraad, rooster en anode, d de hartafstand der roosterdraden (spoed), Q_0 de lading van één ring, $H_0^{(1)}$ en J_0 Bessel-functies van de nulde orde, b en B de ladingsdichtheden op resp. gloeidraad en anode, x de coördinaat in de asrichting en r de afstand tot het middelpunt van de gloeidraad. We voeren nu in:

1° de condities $R_0 - \varrho >> d$ en $R - R_0 >> d$, waardoor de tweede en de vierde term verwaarloosbaar klein worden;

2°, teneinde van cylindrische electroden op vlakke evenwijdige electroden over te kunnen gaan, $\varrho = R_0 - l_1$, $r = R_0 + k$, $R = R_0 + l_2$ en $Q_0 = 2\pi R_0 \gamma_0$, waarin γ_0 de lading van een roosterdraad per lengte-eenheid is;

3° de conditie $d >> c$, als c de straal van een roosterdraad is.

Noemen we de capaciteiten van anode en kathode t.o.v. de massief gedachte rooster C_a en C_k, dan volgt hieruit

$$\frac{B_0}{b_0} = \frac{C_a}{C_k} \cdot \frac{2\pi\varrho}{2\pi R} \frac{V_a - V_e}{V_k - V_e} = \frac{C_a (R_0 - l_1)}{C_k (R_0 + l_2)} \left(1 - \frac{V_a}{V_e}\right), \text{ als } V_k = 0 .$$

Daar de som der ladingen op de electroden nul is, dus

$$\frac{R_0 + l_2}{R_0} B_0 + \frac{R_0 - l_1}{R_0} b_0 + \frac{\gamma_0}{d} = 0, \text{ krijgen we}$$

$$V = \frac{4\pi\gamma_0}{d} \frac{C_k V_e}{(C_k + C_a) V_e - C_a V_a} R_0 \ln (R_0 + k) +$$

$$+ \frac{4\pi\gamma_0}{d} \frac{C_a (V_e - V_a)}{(C_k + C_a) V_e - C_a V_a} R_0 \ln (R_0 + l_2) - \frac{4\pi\gamma_0}{d} R_0 \ln (R_0 + k) +$$

$$+ 4\pi^2 i R_0 \frac{\gamma_0}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{d} H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi i n r}{d}\right) J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{d}\right) + C .$$

Door nu hierin $R_0 = \infty$ te stellen krijgen we de vergelijking voor een triode met vlakke electroden, waarin l_1 de afstand is tussen kathode en rooster en l_2 de afstand tussen rooster en anode. Na enig omwerken, waarbij we gebruik maken van

$$\lim_{R_0 = \infty} R_0 \ln\left(1 + \frac{k}{R_0}\right) = k ,$$

$$\lim_{\frac{2\pi n r}{d} = \infty} i H_0^{(1)}\left(\frac{2\pi n r}{d}\right) = \frac{e^{-\frac{2\pi n r}{d}}}{\sqrt{\frac{\pi^2 n r}{d}}} ,$$

$$\lim_{\frac{2\pi n R_0}{d} = \infty} J_0\left(\frac{2\pi i n R_0}{d}\right) = \frac{e^{-\frac{2\pi n R_0}{d}}}{\sqrt{\frac{4\pi^2 n R_0}{d}}} ,$$

vinden we, daar voor vlakke electroden geldt $\frac{C_a}{C_k} = \frac{l_1}{l_2}$,

$$V = \frac{4\pi\gamma_0}{d} \frac{l_1}{(l_1 + l_2) V_e - l_1 V_a} \left[(V_a - V_e) k + (V_e - V_a) l_2 \right] -$$

$$- \gamma_0 \ln\left(1 - 2e^{-\frac{2\pi k}{d}} \cos \frac{2\pi x}{d} + e^{-\frac{4\pi k}{d}}\right) + C .$$

x is hierin de coördinaat in en k de coördinaat loodrecht op het roostervlak. Door $k = 0$ en $x = c$ te stellen, waarbij V gelijk wordt aan de roosterpotentiaal V_g, vinden we de integratieconstante C, zodat we voor V krijgen

$$V = \frac{4\pi\gamma_0}{d} \frac{l_1 (V_a - V_e)}{(l_1 + l_2) V_e - l_1 V_a} . k -$$

$$- \gamma_0 \ln \left(1 - 2 e^{-\frac{2\pi k}{d}} \cos \frac{2\pi x}{d} + e^{-\frac{4\pi k}{d}} \right) + \gamma_0 \ln \left(2 \sin \frac{\pi c}{d} \right)^2 + V_g .$$

De lading γ_0 kunnen we vinden door alle electroden massief te denken met een potentiaal gelijk aan de effectieve potentiaal. De lading van de middelste electrode is dan gelijk aan de lading van de rooster, welke lading we ons over de roosterdraden verdeeld moeten denken. Voor een vlakke rooster wordt dan

$$\gamma_0 = \frac{d}{4\pi} \left(\frac{V_e - V_k}{l_1} + \frac{V_e - V_a}{l_2} \right) = \frac{V_e - V_g}{2 \ln \frac{2\pi c}{d}},$$

daar $D_{kr} = \frac{l_2}{l_1} D_{ar} = \frac{d}{2\pi l_1} \ln \frac{d}{2\pi c}$, indien we gebruik maken van de bekende formule voor de doordringing $D = \frac{d \ln \frac{d}{2\pi c}}{2\pi l}$. Noemen we de veldsterkte aan de kathodezijde van de rooster E_1 en die aan de anodezijde E_2, dan is

$$E_1 = \frac{V_e - V_k}{l_1} \text{ en } E_2 = \frac{V_e - V_a}{l_2}.$$

Met behulp van de formule voor de effectieve potentiaal vinden we verder, als $P = \frac{d}{2\pi} \ln \frac{d}{2\pi c}$,

$$(E_1 - E_2) P = (V_e - V_k) D_{kr} - (V_a - V_e) D_{ar} = V_g - V_e .$$

We kunnen nu de formule voor de potentiaal in het rooster-veld schrijven als

$$V = \frac{d}{4\pi P} \ln \left\{ e^{\frac{2\pi k}{d}} - 2 \cos \frac{2\pi x}{d} + e^{-\frac{2\pi k}{d}} \right\} . (V_e - V_g) +$$

$$+ \frac{d}{4\pi P} \ln e^{-\frac{2\pi k}{d}} . (V_e - V_g) + k E_2 + V_e$$

of

$$V = \frac{d}{4\pi P} \ln \left\{ 2 \left(\cosh \frac{2\pi k}{d} - \cos \frac{2\pi x}{d} \right) \right\} . (V_e - V_g) +$$
$$+ \tfrac{1}{2} k (E_1 + E_2) + V_e .$$

Deze formule geldt nu voor elke rooster tussen twee andere electroden mits de afstanden tot deze electroden l_1 en $l_2 >> d$ zijn en $d >> c$ is.

Het potentiaalverloop in het vlak van een rooster als functie van x wordt dan ($k = 0$)

$$V = V_e + (V_e - V_g) \frac{\ln \left(2 \sin \frac{\pi x}{d} \right)}{\ln \frac{d}{2\pi c}} .$$

Electronen, die in stuur- en schermrooster zijn afgebogen en deze laatste rooster verlaten onder een hoek α, bezitten in de richting van de remrooster een snelheid $v = v_0 \cos \alpha$, als de snelheid in de schermrooster is $v_0 = \sqrt{\frac{2e}{m} V_{e2}}$. Deze snelheid v correspondeert met een spanning $V = V_{e2} \cos^2 \alpha$. Het spanningsverlies V_c in de richting van de remrooster is dan
$V_c = V_{e2} - V = V_{e2} (1 - \cos^2 \alpha) = V_{e2} \sin^2 \alpha \approx V_{e2} . \alpha^2$ als α klein is. Voor deze electronen is het dus als stond de remrooster op een potentiaal $- V_c$. Het deel $(d - 2 x_0)$ van het potentiaalveld van de remrooster, waar deze electronen kunnen passeren, vinden we dus met

$$V_c = V_{e3} + (V_{e3} - V_3) \frac{\ln \left(2 \sin \frac{\pi x_0}{d} \right)}{\ln \frac{d}{2\pi c}} ,$$

zodat van de electronen die onder een hoek α worden afgebogen een deel de anode bereikt, gelijk aan

$$\frac{d - 2 x_0}{d} = 1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left\{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{d}{2\pi c} \right)^{\frac{V_c - V_{e3}}{V_{e3}}} \right\} .$$

De verdeling van de afbuigingshoeken over de totale uit de schermrooster tredende stroom is voorgesteld in fig. 2, waarin α_1 en α_2 voorstellen de maximale hoekafbuigingen resp. in stuur- en schermrooster. Verondersteld is $\alpha_1 > \alpha_2$.

De hoekafbuigingen in een rooster berekent men met [3])

$$\alpha_{max} = \frac{V_e - V_g}{V_e} \frac{\pi}{2 \ln \frac{d}{2 \pi c}}.$$

De hoekafbuiging γ in de stuurrooster geeft bij de schermrooster een hoekafbuiging

$$\alpha_1 = \gamma \sqrt{\frac{V_{e1}}{V_{e2}}}.$$

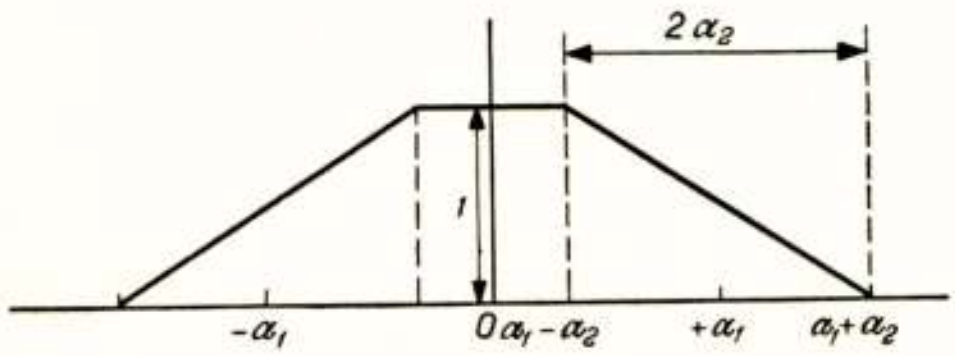


Fig. 2.
Verdeling van de afbuigingshoeken in de electronenstroom die uit de schermrooster treedt, veroorzaakt door twee roosters.

Bij kleine waarden van α_1 en α_2 kan men deze eenvoudig optellen. Het deel van de totale uit de schermrooster tredende electronenstroom I_s dat de remrooster kan passeren, dus de totale anodestroom I_a, vinden we door te integreren over de hoekafbuigingen van 0 tot $\alpha_1 + \alpha_2$. Geven we de hoogte van het trapezium van fig. 2 de waarde 1, dan is de oppervlakte $2\alpha_1$, zodat

$$I_a = \frac{I_s}{\alpha_1} \int_0^{\alpha_1 - \alpha_2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left\{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{d}{2 \pi c} \right)^{\frac{V_c - V_{e3}}{V_{e3}}} \right\} \right] d\alpha +$$

$$+ I_s \left(\frac{1}{2 \alpha_1} + \frac{1}{2 \alpha_2} \right) \int_{\alpha_1 - \alpha_2}^{\alpha_1 + \alpha_2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left\{ \tfrac{1}{2} \left(\frac{d}{2 \pi c} \right)^{\frac{V_c - V_{e3}}{V_{e3}}} \right\} \right] d\alpha -$$

$$-\frac{I_s}{2\,a_1\,a_2}\int\limits_{a_1-a_2}^{a_1+a_2}\left[1-\frac{2}{\pi}\arcsin\left\{\tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{2\,\pi\,c}\right)^{\frac{V_c-V_{e3}}{V_{e3}}}\right\}\right]a\,da\,.$$

Noemen we $\dfrac{\ln\dfrac{d}{2\,\pi\,c}}{V_{e3}}=G$ en $\ln\left\{\tfrac{1}{2}\left(\dfrac{d}{2\,\pi\,c}\right)^{-1}\right\}=A$ en vervangen we a door $\sqrt{\dfrac{V_c}{V_{e2}}}$, dan krijgen we na vereenvoudigen

$$\frac{I_a}{I_s}=1-\frac{1}{\pi\sqrt{V_{e2}}}\left(\frac{1}{2\,a_1}-\frac{1}{2\,a_2}\right)\int\limits_0^{(a_1-a_2)^2\,V_{e2}}\arcsin e^{G\,V_c+A}\,V_c^{-\frac{1}{2}}\,dV_c\,-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{V_{e2}}}\left(\frac{1}{2\,a_1}+\frac{1}{2\,a_2}\right)\int\limits_0^{(a_1+a_2)^2\,V_{e2}}\arcsin e^{G\,V_c+A}\,V_c^{-\frac{1}{2}}\,dV_c\,+$$

$$+\frac{1}{2\,\pi\,V_{e2}\,a_1\,a_2}\int\limits_{(a_1-a_2)^2\,V_{e2}}^{a_1+a_2)^2\,V_{e2}}\arcsin e^{G\,V_c+A}\,dV_c\,.$$

We noemen $(a_1-a_2)^2\,V_{e2}\,G=P_1$, $(a_1+a_2)^2\,V_{e2}\,G=P_2$ en

$$\int\limits_0^P\arcsin e^{G\,V_c+A}(G\,V_c)^{-\frac{1}{2}}\,d(G\,V_c)=F(P\,,A)\,.$$

Deze laatste functie hebben we vroeger [4]) grafisch geïntegreerd en in een grafiek vastgelegd (zie fig. 3). De derde integraal lossen we op door $e^{G\,V_c+A}=\sin s$ te stellen. We krijgen dan een integraal van de vorm $\int s\,\mathrm{cotg}\,s\,ds$. Cotg s ontwikkelen we in een reeks:

$$\mathrm{cotg}\,s=\frac{1}{s}-\frac{1}{3}s-\frac{1}{45}s^3-\frac{2}{945}s^5-\ldots;$$

deze convergeert snel, daar $s<1$ is. Noemen we verder

$\arcsin e^{P_1 + A} = R$ en $\arcsin e^{P_2 + A} = Q$, dan wordt

$$\frac{I_a}{I_s} = 1 + \frac{1}{2\pi a_1 a_2}\left[(a_1 - a_2)^2 \frac{F(P_1, A)}{\sqrt{P_1}} - (a_1 + a_2)^2 \frac{F(P_2, A)}{\sqrt{P_2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{G V_{e2}}\left\{(Q - R) - \tfrac{1}{9}(Q^3 - R^3) - \tfrac{1}{225}(Q^5 - R^5) - \ldots\right\}\right].$$

Met behulp van de uitdrukking voor V_{e3} als functie van V_a (zie § 1) kunnen we nu dus door invullen van numerieke waarden van $V_a \pm \triangle V_a$ de bijbehorende waarden van V_{e3} berekenen en

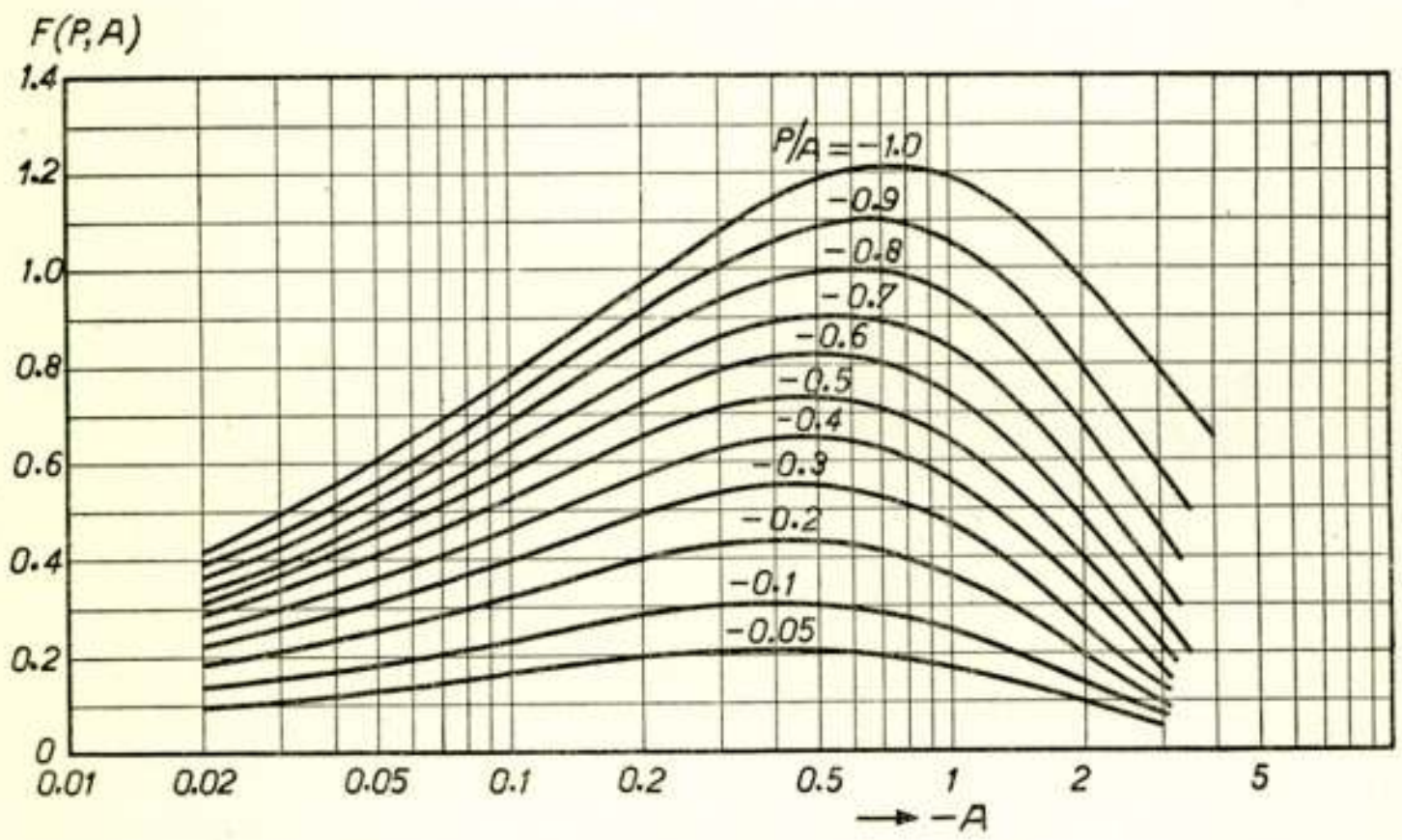


Fig. 3.

De grafisch bepaalde functie $F(P, A) = \int_0^P \arcsin e^{x+A} x^{-\frac{1}{2}} dx$ als functie van A met P/A als parameter.

in bovenstaande formule invullen, en daarmede de $\triangle I_a$ bepalen die hierdoor ontstaat, waaruit dan de inwendige weerstand $R_{i,\,str.v.\,II} = \dfrac{\triangle V_a}{\triangle I_a}$ volgt. Daar bovenstaande berekening alleen geldt indien aan weerszijden van de remrooster gelijke veldsterkten heersen, zijn in tabel II de potentialen hieraan aangepast. Ter vergelijking zijn $R_{i,\,el.st.}$ en $R_{i,\,str.v.\,I}$ onder deze omstandigheden eveneens weergegeven.

Tabel II

	V_1	V_2	V_a	S_a	I_a	$R_{i,\,el.\,st.}$	$R_{i,\,str.v.\,I}$	$R_{i,\,str.v.\,II}$	$R_{i,\,str.v.\,III}$	R_i gemeten
F 50	0 V	125 V	200 V	6,8 mA/V	11,5 mA	5,9 MΩ	40 MΩ	2 MΩ	3,5 MΩ	0,55 MΩ
F 6	−5 V	250 V	150 V	2,5 mA/V	10 mA	10 MΩ	71 MΩ	1,4 MΩ	3 MΩ	0,5 MΩ
F 7	−2,5 V	200 V	160 V	2,9 mA/V	10,8 mA	12 MΩ	48 MΩ	1,6 MΩ	2 MΩ	0,4 MΩ

Hieruit blijkt, dat dit effect belangrijk bijdraagt tot het tot stand komen van de R_i der stroomverdeling.

Tot slot zullen we nagaan op welke wijze ook de gereflecteerde electronen de stroomverdeling kunnen beïnvloeden.

IV. *De invloed van gereflecteerde electronen op de stroomverdeling*

In een vroegere publicatie [6]) hebben we voor een vlakke electrodenopstelling experimenteel onderzocht welke potentiaal secundaire en gereflecteerde electronen van een zuiver nikkelen en van een met roet bedekte nikkelen anode op grond van hun initiale snelheid en richting kunnen overwinnen.

Willen electronen van de anode door de remrooster heen de schermrooster bereiken, dan moeten ze bij benadering het potentiaalverschil $V_a - V_{e3}$ kunnen overwinnen, zodat we in een hoogfrequentpenthode, waar $V_{e3} << V_a$ is, uitsluitend met de snelste gereflecteerde electronen te maken hebben. Bij variatie van V_a verandert de tegenspanning $V_a - V_{e3}$ die de electronen moeten overwinnen, terwijl tevens een verandering optreedt in het aantal gereflecteerde electronen door verandering van de beschietingsspanning. In fig. 4 hebben we van de vroeger gevonden krommen, waarin $I_{sec.}/I_{prim.}$ als functie van de tegenspanning is uitgezet, het deel dat een grote tegenspanning kan overwinnen en dus uit gereflecteerde electronen bestaat, opnieuw uitgezet voor een zuiver nikkelen anode en voor een met roet bedekte nikkelen anode. Aan de hand van deze krommen kan men nu grafisch de stroomverandering bepalen, die zou optreden bij verandering van $V_a - V_{e3}$ en V_a. We zullen dit aan de hand van een practisch voorbeeld (EF 6, nikkelen anode) toelichten.

Stel $V_a = 200$ volt, $V_{e3} = 38$ volt, dan is de tegenspanning $V_t = V_a - V_{e3} = 162$ volt. We vinden dan in fig. 4 voor het aantal gereflecteerde electronen, dat de remrooster kan passeren, $I_{refl.} = 0{,}026\, I_{prim.}$. Is $\triangle V_a = \pm 50$ volt, dus $V_{a1} = 150$ volt, $V_{a2} = 250$ volt, dan berekenen we bij een gegeven electroden-

geometrie $V_{t1} = 117$ volt, $V_{t2} = 208$ volt. In dit geval zal volgens fig. 4 $I_{refl.1} = 0{,}0295\ I_{prim.}$ en $I_{refl.2} = 0{,}024\ I_{prim.}$ zijn. We vinden dan dientengevolge bij $I_{prim.} = 3$ mA

$$R_{i,\,str.v.\,III} = -\frac{V_{a2} - V_{a1}}{I_{refl.2} - I_{refl.1}} = \frac{100 \text{ volt}}{0{,}0055 \times 0{,}003 \text{ amp.}} = 6\ \text{M}\,\Omega\,.$$

Nu geeft zuiver nikkel veel gereflecteerde electronen. Ter vergelijking is in fig. 4 aangegeven het verloop van de kromme

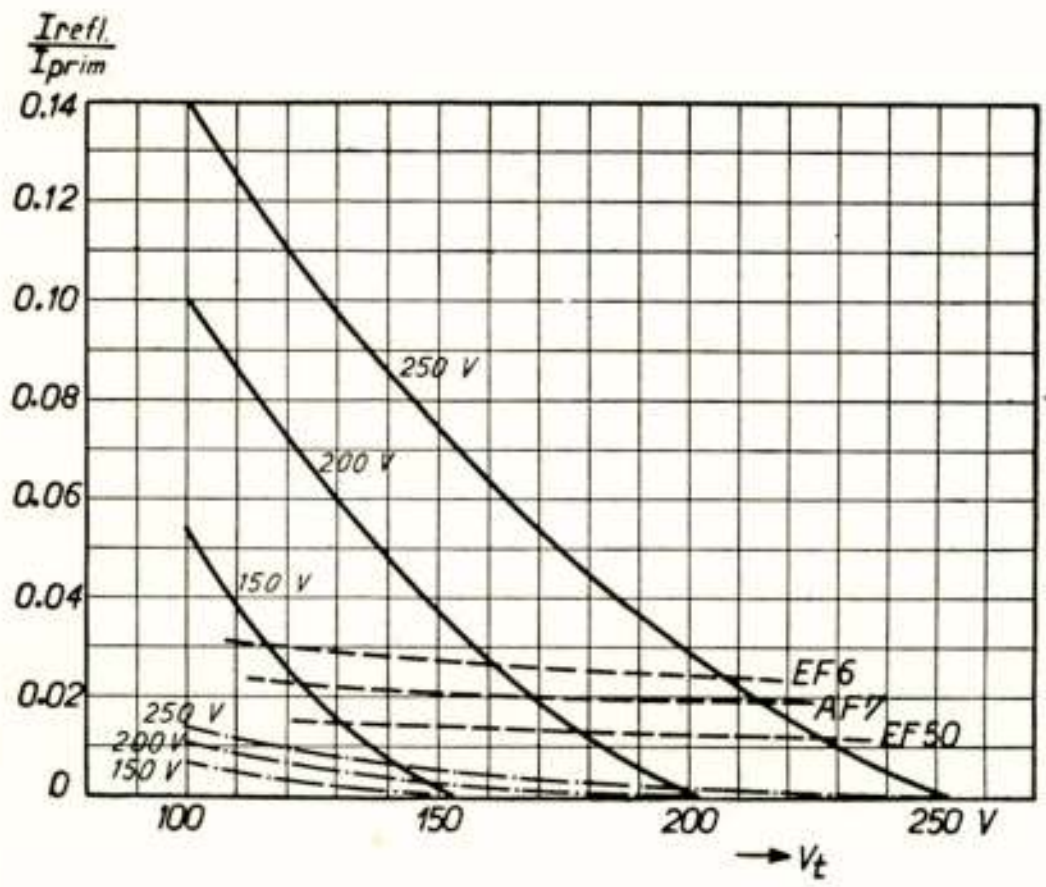


Fig. 4.

De verhouding $I_{refl.}/I_{prim.}$ van de gereflecteerde electronenstroom $I_{refl.}$ die een tegenspanning V_t kan overwinnen, tot de primaire electronenstroom $I_{prim.}$ De getrokken krommen gelden voor een onbedekte nikkelen anode bij beschietingsspanningen van resp. 150, 200 en 250 volt, de streep-stip-lijnen voor een met roet bedekte nikkelen anode. Bij verandering van de anodespanning zal het deel van de gereflecteerde electronenstroom, dat de remrooster kan passeren, veranderen volgens de streeplijnen.

voor het geval dat het nikkel bedekt is met roet. Ook oppervlakken met een hoge secundaire-emissiefactor, bijv. nikkel bedekt met bariumoxyde e.d., bezitten minder gereflecteerde electronen (bijv. 0,25 à 0,5 maal). Gaan we dit effect na aan enige practische buizen, waarbij we aannemen dat de anode van zuiver nikkel is, dan vinden we de waarden die in tabel II zijn gegeven.

Hieruit volgt, dat ook dit verschijnsel in belangrijke mate kan bijdragen tot de inwendige weerstand der stroomverdeling van een hoogfrequentpenthode.

Conclusie

De gemeten waarden in tabel II zijn niet geheel gelijk aan de berekende waarden. Dit komt doordat bij het bepalen van de verschillende factoren van enkele vereenvoudigingen moest worden uitgegaan. Er werd nl. verondersteld:

1° dat de hoekafbuigingen in een negatieve rooster lineair verdeeld zijn over de electronenstroom[3]),

2° dat $I_a/I_s = (d - 2\,x_0)/d$ is, wat niet geheel overeenkomstig de gemeten punten in fig. 1 is,

3° dat de zijdelingse snelheden der electronen verwaarloosd mogen worden,

4° dat de ruimtelading geen invloed heeft,

5° dat de gereflecteerde electronen een cosinus-verdeling bezitten[6]). In werkelijkheid is hun snelheid meer loodrecht op het oppervlak gericht.

Uit bovenstaande analyse blijkt echter dat de remrooster in de penthode op gecompliceerde wijze de inwendige weerstand beïnvloedt. Hoewel een uitstekend middel om de overgang van secundaire electronen tussen schermrooster en anode te voorkomen, kan hij niet verhinderen, dat een deel van de snelle gereflecteerde electronen van de anode zich naar de schermrooster begeeft. Bij verandering van de anodespanning zal dit deel mede veranderen, waardoor een verandering in de stroomverdeling ontstaat, waardoor de inwendige weerstand wordt verlaagd.

De primaire electronen die zich naar de remrooster begeven zijn in stuur- en schermrooster uit hun oorspronkelijke richting afgebogen. In de richting van de remrooster hebben ze dus als het ware snelheid verloren. Hierdoor kan een deel van deze electronen de remrooster niet meer passeren en keert terug naar de schermrooster. Bij verandering van de anodespanning zal ook de grootte van dit terugkerende deel veranderen, waardoor de inwendige weerstand eveneens wordt verlaagd.

Het blijkt dat bij hoogfrequentpenthoden deze effecten een grotere rol spelen dan de electrostatische werking van de anode en de directe stroomopneming van de schermrooster. Bij eindpenthoden echter geeft de electrostatische werking van de anode de doorslag,

Eindhoven, Februari 1950.

Literatuur

1) K. R. Spangenberg, Vacuum tubes, hfdst. 7 (1948).
2) W. Schottky, Arch.f. Elektrotechnik **8**, 299—328, 1920.
3) J. L. H. Jonker en B. D. H. Tellegen, Philips Res. Rep. **1**, 13—32, 1945.
4) J. L. H. Jonker, Philips Res. Rep. **1**, 331—338, 1946.
5) G. J. Elias, Tijdschr. Ned. Radiogenootschap **2**, 23—37, 1925.
6) J. L. H. Jonker, Wireless Engineer **61**, 274—286, 344—349, 1939, fig. 11.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Cylindervormige uitbreiding van electromagnetische golven in een medium met veranderlijke electrische eigenschappen (Elias-laag) boven een half-geleidende aarde

door C. T. F. van der Wyck

(*Op verzoek van den schrijver is dit artikel in de oude spelling gedrukt*)

SUMMARY

Expressions for the Hertzian-vector of a vertical electric dipole, in a medium with exponentially varying refractive-index (Elias-layer) above a flat, homogeneous, half conducting earth are given in accordance with the thesis of the author.

A geometrical-optical interpretation of the expressions for the Hertzian-vector is given, with the aid of the saddle-point method.

De volgende beschouwingen zijn gewijd aan het stralingsveld van een verticale dipool op het aardoppervlak. Boven het aardoppervlak — hetwelk als vlak wordt aangenomen — zijn de electrische eigenschappen van het medium een functie van de hoogte; de aarde is homogeen en half-geleidend ondersteld.

De z-as van het cylinder-coördinatensysteem staat loodrecht op het aardoppervlak; de r- en φ-coördinaten bevinden zich in dit vlak.

De tijdsafhankelijkheid van de complexe grootheden is overeenkomstig $e^{-i\omega t}$. Het gebruikte eenhedenstelsel is dat van Heaviside-Lorentz.

I. *De uitdrukking voor de potentiaal van Hertz Π.*

Het veld van de dipool wordt gekarakteriseerd door den z-component van Π; de algemeene oplossing van Π is in een cylindrische configuratie van de volgende gedaante.[1][3]

[1]) Frank von Mises Differentialgleichungen deel II, XXIII, (Sommerfeld)

[2]) van der Pol-Bremmer, Philos. Mag., serie 7, vol. 24/27.

[3]) van der Wyck, Dissertatie Delft 1946.

$$\Pi = \int_a^b C(\lambda)\, H_o^{(1)}(\lambda r)\, Z(\lambda)\, d\lambda \tag{1}$$

a en b, evenals $C(\lambda)$, worden bepaald uit de randvoorwaarden en de singulariteitsvoorwaarde van het probleem.

$H_o^{(1)}$ is de Hankelsche functie van de eerste soort en $Z(\lambda)$ een oplossing van

$$\frac{d^2 Z}{d z^2} - \frac{\tau'}{\tau}\frac{d Z}{d z} + \frac{i\omega}{c^2}(\tau - \lambda^2)\, Z = 0\,. \tag{2}$$

$\tau = -i\omega\varepsilon + \sigma$, ε = diëlectr. const., σ = geleidingsvermogen
τ' = afgel. van τ in de z-richting.

Beneden het aardopp. ($z < 0$), alsmede voor relatief kleine hoogten daarboven (beneden de eigenlijke ionospheer) luidt (2)

$$\frac{d^2 Z}{d z^2} + \frac{i\omega}{c^2}(\tau - \lambda^2)\, Z = 0 \tag{3}$$

met als oplossingen $e^{\pm z\sqrt{\lambda^2 - k_{o,a}^2}}$ (3a)

De indices o en a hebben resp. betrekking op „vacuo" en de aarde.

$$k_o^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{en} \quad k_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_a + \frac{i\omega}{c^2}\sigma_a \tag{3b}$$

De wortelvorm $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ is bepaald door de afspraak, dat de positieve wortel, d.i. met een positief reëel gedeelte, wordt genomen.

De oplossingen (3a) stellen, althans voor $\lambda < k_o$, golfbewegingen voor in de richting van de negatieve en van de positieve z-as, gekarakteriseerd door λ; het verband tusschen deze beide golven aan het aardoppervlak, gereflecteerde en omhooggaande golven, is gegeven door den reflectie-coëfficient $A(\lambda)$, welke grootheid in Π zal worden bepaald.

Uitgaande van de randvoorwaarden aan het aardoppervlak, continuïteit van $\tau\,\Pi$ en $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, en de singulariteitsvoorwaarde, verticale dipool op een hoogte δ boven het aardoppervlak ($\delta \to 0$), vindt men voor de potentiaal op niet te groote hoogte boven de aarde[1])[3])

$$\Pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_a^2 \left[e^{-z\sqrt{\lambda^2 - k_o^2}} + A(\lambda)\, e^{z\sqrt{\lambda^2 - k_o^2}} \right]}{k_o^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\,[1 + A(\lambda)] + k_a^2 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2}\,[1 - A(\lambda)]} \lambda H_o^{(1)}(\lambda r)\, d\lambda \qquad (4)$$

II. *Ionospheer, reflectiecoëfficient.*

In overeenstemming met Elias[4]) wordt t.a.v. de veranderlijkheid der electrische grootheden ε, σ en τ met de hoogte boven de aarde het volgende functioneele verband aangenomen

$$\tau = -i\omega + \omega e^{k z_1} (1 + i\eta) \qquad (5)$$

$$\eta = \frac{\omega}{\nu}, \qquad \nu = \text{botsingsfrequentie}$$

z_1 is een coördinaat in de z-richting met verschoven nulpunt; het punt $z_1 = 0$ bevindt zich op een bepaalde hoogte h boven het aardoppervlak, hetwelk met een groote negatieve waarde van z_1 overeenkomt.

De grootheid k bepaalt de mate van verandering der electrische grootheden. In het geval van een zeer geleidelijke verandering heeft k een kleine waarde, terwijl een discontinue overgang (reflecteerend vlak) overeenkomt met $k \to \infty$.

Een weergave van het werkelijke verband van τ en z impliceert, dat k en η van plaats tot plaats veranderen; echter kan een bepaald gedeelte van de ionospheer door constante waarden van k en η worden benaderd, welke waarden in overeenstemming met die in het reflectievlak kunnen worden gekozen.

De volgende beschouwingen hebben in het bijzonder op *korte golven* betrekking, op een geleidelijke verandering der grootheden in de ionospheer en een relatief geringe demping der golven.

De golfrichting in een vlak z is gegeven door de wet van Snellius

$$\varepsilon_z \sin^2 \vartheta_z = \sin^2 \vartheta_o = \varepsilon_r \qquad (6)$$

ε_z = diël. const. in z, ϑ_z = hoek straalrichting met de z-as, in z.

ϑ_o = invalshoek der golven op de ionospheer,

ε_r = diëlectrische constante in het reflectiepunt.

[4]) Elias, Tijdschrift v. h. Nederl. Radio Genootsch. 3. 1. 1926.
E. N. T. 2. 351. 1925.
1. 4. 1931.
Proc. I. R. E. 19. 892. 1931.

Uit (2a) en (5) leidt men af

$$\varepsilon = (1 - \eta\, e^{kz_1}) \tag{7}$$

en uit (6) en (7) voor de
z_1-coördinaat van het omkeerpunt

$$z_1^r = \frac{2\, ln \cos \vartheta_o - ln\, \eta}{k} \tag{8}$$

De differentiaalvergelijking voor de golfuitbreiding in de ionospheer luidt na substitutie van (5) in (2) en overgang naar de variabele

$$w = p\,(1 + \eta^2)^{\frac{1}{4}}\, e^{\frac{kz_1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}(\pi - \beta)} \tag{9}$$

waarin

$$p = \frac{2\,\omega}{c\,k} \quad \text{en} \quad tg\,\beta = \frac{1}{\eta} \tag{9a}$$

$$w^2 \frac{d^2 Z}{d\,w^2} + w \frac{dZ}{d\,w} \frac{p^2 - w^2}{p^2 + w^2} + Z\,(w^2 - a^2) = 0 \tag{10}$$

$$a = p \sqrt{\lambda^2 \frac{c^2}{\omega^2} - 1} = \frac{2}{k} \sqrt{\lambda^2 - k_o^2} \tag{10a}$$

Bovenstaande differentiaalvergelijking is behandeld door Elias[4]); in het onderhavige geval (korte golven), hetgeen impliceert k zeer klein en p en $|a|$ zeer groot, is de oplossing $C_a(w)$, waarin C_a een cylinderfunctie van de orde a voorstelt.

In verband met de voorwaarde $|C_a(w)| \to 0$ voor $z_1 \to \infty$ ($|w| \to \infty$ in de bovenste helft van het complexe w-vlak) is deze cylinderfunctie: $H_a^{(1)}(w)$, welke functie voor kleine waarden van w — d.i. aan het aardoppervlak — een reeksontwikkeling geeft met als eerste term

$$2\left[\frac{w^a}{2^a\, \Pi\,(a)} - e^{i a \pi} \frac{w^{-a}}{2^{-a}\, \Pi\,(-a)}\right]$$

of i.v.m. (9)

$$2\, e^{\frac{i a \pi}{2}} \left[\frac{p^a (1 + \eta^2)^{\frac{a}{4}}\, e^{-i \frac{a}{2\eta}}}{2^a\, \Pi\,(a)} e^{z_1 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2}} - \frac{p^{-a} (1 + \eta^2)^{-\frac{a}{4}}\, e^{i \frac{a}{2\eta}}}{2^{-a}\, \Pi\,(-a)} e^{-z_1 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2}}\right]. \tag{10}$$

Het eerste gedeelte van deze uitdrukking stelt een golf-

beweging in de richting van de negatieve z-as (gereflecteerde golf), het tweede gedeelte in de richting van de positieve z-as (omhooggaande golf) voor.

De reflectiecoëfficient $A(\lambda)$, welke in I werd geïntroduceerd, volgt uit (11) en (3a)

$$A(\lambda) = -\left(\frac{p}{2}\right)^{2\alpha} (1+\eta^2)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\Pi(-\alpha)}{\Pi(\alpha)} e^{-i\frac{\alpha}{\eta}} e^{-2h\sqrt{\lambda^2-k_o^2}} \quad (12)$$

$$h = z - z_1$$

Met het oog op de verdere mathematische behandeling zal bovenstaande uitdrukking voor $A(\lambda)$ in den vorm van een exponentiaal-functie worden gebracht, terwijl de parameter λ, welke in de uitdrukking voor de vectorpotentiaal (4) voorkomt (waarin (12) gesubstitueerd dient te worden gedacht) wordt vervangen door ϑ.

Het verband tussen λ en ϑ is gegeven door $\lambda = k_o \sin\vartheta$; de parameter ϑ karakteriseert een component van het samenstel van golven in (4) en kan — hetgeen blijkt uit de beschouwing van (3a) — als de invalshoek dezer golfcomponenten worden opgevat.

Na invoering van $\lambda = k_o \sin\vartheta$ (13) in de uitdrukking voor α (10a) verkrijgt men $\alpha = -i\frac{2k_o\cos\vartheta}{k} = -ip\cos\vartheta$ (14) en na toepassing van benaderingsformules voor $\Pi(\alpha)$ i.v.m. p en $|\alpha| >> 1$ (geleidelijke verandering der grootheden) [5])

$$\frac{\Pi(-\alpha)}{\Pi(\alpha)} = \exp. i\left[\frac{\pi}{2} + \frac{4k_o\cos\vartheta}{k}\left(ln\frac{2k_o\cos\vartheta}{k} - 1\right)\right] \quad (15)$$

Substitutie van (13) (15) en de uitdrukking (8) voor de z_1 — coördinaat van het omkeerpunt (van een golf met invalshoek ϑ) brengt $A(\lambda)$ (12) in de volgende gedaante

$$A(\vartheta) = \exp.\left\{i\left[\frac{3\pi}{2} + k_o\cos\vartheta \,.\, z_1^r + 2p\cos\vartheta\,(ln\,2 - 1) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2k_o h\cos\vartheta\right] - \frac{p}{\mu}\cos\vartheta\right\} \quad (16)$$

In de uitwerking van het probleem zijn de volgende grootheden van een physisch belang

[5]) Jahnke en Emde, Funktionentafeln (3e druk).

$$h_o = h + z_1^r \quad (17) \qquad h_o' = h_o + \frac{p}{k_o}(ln\, 2 - 1) \quad (18)$$

$$h_o'' = h_o + \frac{p}{k_o}\, ln\, 2 \quad (19)$$

In IV wordt de beteekenis van (18) en (19) besproken; h_o = hoogte van het omkeerpunt boven het aardoppervlak van een straal met invals- (en opstraal) hoek ϑ.

Invoering van (18) in (16) geeft tenslotte aan $A(\vartheta)$ den vorm

$$A(\vartheta) = \exp. \left\{ i \left[\frac{3\pi}{2} + 2\, k_o \cos\vartheta\, h_o' \right] - \frac{p}{\mu} \cos\vartheta \right\} \qquad (20)$$

III. *De golfbeweging als een samenstel van stralen.*

De mathematische uitwerking van de uitdrukkingen voor de vectorpotentiaal (4) en den reflectiecoëfficiënt (20) zal worden uitgevoerd aan de hand van een oplossingsmethode, aangegeven door Van der Pol en Bremmer[2]) en waarin van de zadelpuntmethode wordt gebruik gemaakt. [3]) pg. 137, [6]) VIII.

Uitgaande van den reflectiecoëfficiënt der golven aan het aardoppervlak

$$R(\lambda) = \frac{k_a^2 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2} - k_o^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}}{k_a^2 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2} + k_o^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}}$$

herleidt men (4) als volgt

$$\frac{k_a^2}{k_o^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2}\,(1 + A(\lambda)) + k_a^2 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2}\,(1 - A(\lambda))} =$$

$$= \frac{k_a^2}{k_o^2 \sqrt{\lambda^2 - k_a^2} + k_a^2 \sqrt{\lambda^2 - k_o^2}} \cdot \frac{1}{1 - A(\lambda)\, R(\lambda)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{1 + R(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k_o^2}} \sum_{m=0}^{\infty} [A(\lambda)]^m\, [R(\lambda)]^m . \qquad (21)$$

De potentiaaluitdrukking (4) verschijnt op grond van de

[6]) Watson Bessel Functions.

laatste herleiding als een samenstel van deelpotentialen van 4 typen

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z\sqrt{\lambda^2-k_o^2}}}{\sqrt{\lambda^2-k_o^2}} [A(\lambda)]^m [R(\lambda)]^m H_o^{(1)}(\lambda r)\, \lambda\, d\lambda \qquad (22)$$

In de deelpotentiaal van type 2 is de exponent m van $R(\lambda) = m + 1$, terwijl typen 3 en 4 verschillen t.a.v. 1 en 2 door den factor exp. $+ z\sqrt{\lambda^2 + k_o^2}$ alsmede $m + 1$ inplaats van m in den exponent van $A(\lambda)$.

Verder in het betoog zal de beteekenis van (22) als een $m \times$ gereflecteerde straal naar voren komen.

Door substitutie van $H_o^{(1)}(\lambda r) = \frac{1}{\pi}\int_{\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} e^{i\lambda r \cos\tau}\, d\tau$ (23) [5])

$$arg\, \lambda r < \eta < \pi - arg\, \lambda r$$

en door invoering van $k_o \sin\vartheta$ voor λ en tevens van $A(\vartheta)$ (20) verkrijgt de deelpotentiaal van type 1 de volgende gedaante

$$\frac{(-1)^m\, i^{m+1}\, k_o}{2\pi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{+\pi/2-i\infty} \int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} [R(\vartheta)]^m\, e^{f(\tau,\vartheta)}\, e^{-m\frac{p}{\eta}\cos\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\tau \qquad (24)$$

$$f(\tau, \vartheta) = i\, k_o \left[r \cos\tau \sin\vartheta + \cos\vartheta\, (z + 2\, h_o' m)\right] \qquad (24a)$$

Overgang naar de onafhankelijk variabele $x = \cos\vartheta$ brengt (24) en (24a) in den vorm

$$\frac{(-i)^{m+1}\, k_o}{2\pi} \int_{+i\infty}^{1} \int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} [R(x)]^m\, e^{f(\tau,x)}\, e^{-m\frac{p}{\eta}x}\, dx\, d\tau \qquad (25)$$

$$f(\tau, x) = i\, k_o \left[r \cos\tau \sqrt{1-x^2} + x\, (z + 2\, h_o' m)\right] \qquad (25a)$$

De integratieweg van x loopt van $i\infty$ naar 1 en terug met een verschillend teeken van $\sqrt{1-x^2}$ op de beide wegen.

Een uitvoerige uiteenzetting van de zadelpuntmethode en van de mathematische uitwerking met behulp dezer methode is in de litteratuur te vinden. [6]) VIII. De zadelpuntmethode komt in het kort op het volgende neer.

De integratieweg in (25) wordt zoodanig getransformeerd, dat deze in de complexe τ, x ruimte een punt τ_0, x_0 passeert, waar $\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$; in dit punt verkrijgen $Re\, f$ en $Im\, f$ extreme waarden (maxima en minima, zadelpunt). De integratieweg door τ_0, x_0 wordt zoodanig gelegd, dat $Re\, f$ aldaar een maximum waarde aanwijst en daarbuiten zoo snel mogelijk afneemt, welke richting is vastgelegd door $Im\, f = Im\, f_0$. Doordat de exponent f de termen $k_0 r$, $k_0 z$ en $k_0 h_0'$ bevat, welke termen in het geval van korte golven zeer groot zijn, kan men zich bij de berekening van de integraal beperken tot de omgeving van het zadelpunt en tot de 2e afgeleiden van f (indien althans, hetgeen wordt ondersteld, deze niet alle $= 0$ zijn).

De coördinaten van het zadelpunt zijn gegeven door

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = -i k_0 r \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos\tau + i k_0 (z + 2 h_0' m) + 2 i p m = i.v.m. \quad (18)\ (19)$$

$$= -i k_0 r \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cos\tau + i k_0 (z + 2 h_0'' m) = 0 \quad (26a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = -i k_0 r \sqrt{1-x^2} \sin\tau = 0 \quad (26b)$$

De laatste term in (26a) ontstaat doordat h_0' i.v.m. (8) (17) (18) eveneens van x afhankelijk is.

Uit (26) vindt men als coördinaten van het zadelpunt

$$\tau_0 = 0 \quad (27a) \qquad \frac{x_0}{\sqrt{1-x_2}} = ctg\, \vartheta_0 = \frac{z + 2 h_0''.m}{r} \quad (27b).$$

De zadelpuntmethode, welke hier door de groote waarde van f (korte golven) toepassing vindt, is de mathematische illustratie van het straalkarakter der golfbeweging, waarbij uit de mogelijke golfbewegingen, gekarakteriseerd door λ, ϑ of x, één „uitverkoren" straal naar voren komt. Van dezen straal zijn ϑ_0, h_0'' en m resp. de invalshoek, de virtueele hoogte en het aantal reflecties tegen de ionospheer. (Fig. 1)

De waarde van f in het zadelpunt volgt uit (25a) en (26)

$$f_o = i\,k_o\,r\left[\sin\vartheta_o + \frac{z + 2\,h_o'\,m}{r}\cos\vartheta_o\right] = \frac{i\,k_o\,r}{\sin\vartheta_o}\left[1 - \frac{2\cos^2\vartheta_o}{k\,h_o''}\right] \quad (28)$$

Ter vereenvoudiging is in den laatsten overgang z t.o.v. $2\,h_o''\,m$ verwaarloosd, welke omissie geenszins essentieel is.

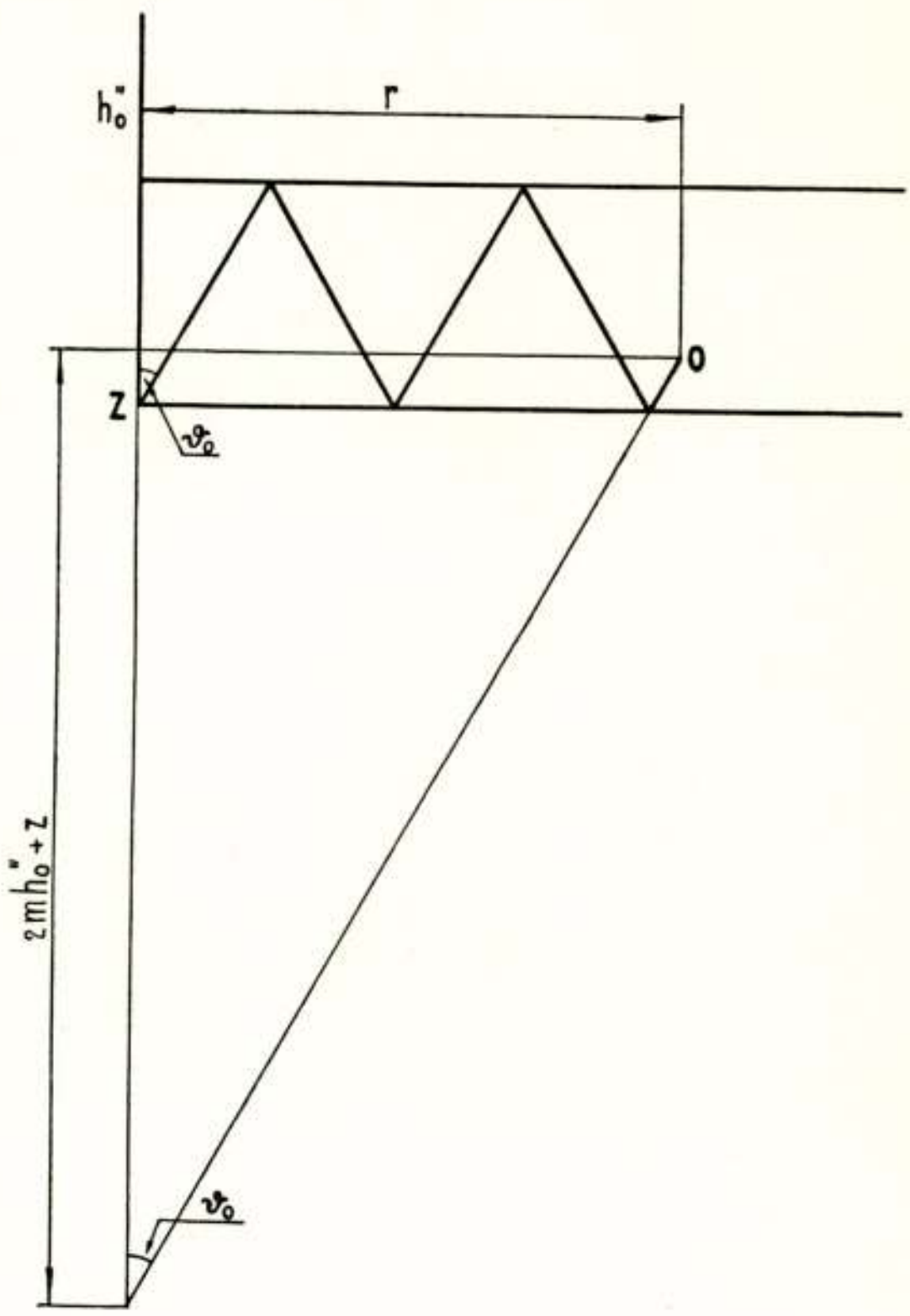


Fig. 1.

Ten behoeve van de verdere uitwerking behoeft men de waarde van het product der 2e afgeleiden in het zadelpunt.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = -\,i\,k_o\,r\cos\tau\sqrt{1 - x^2} \quad (29a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\,i\,k_o\,r\,\frac{\cos\tau}{\sqrt{1 - x^2}} - i\,k_o\,r\cos\tau\,\frac{x^2}{(1 - x^2)^{3/2}} + 2\,i\frac{p}{x}\,m \quad (29b)$$

Na invoering van (27) verkrijgt men

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}\right]_o = \left[\frac{-i k_o r}{\sin \vartheta_o}\right]^2 \left[1 - \frac{2 \sin^2 \vartheta_o}{k h_o''}\right] \tag{30}$$

en als einduitkomst van de zadelpuntmethode[6]) voor (25), de deelpotentiaal van het eerste type

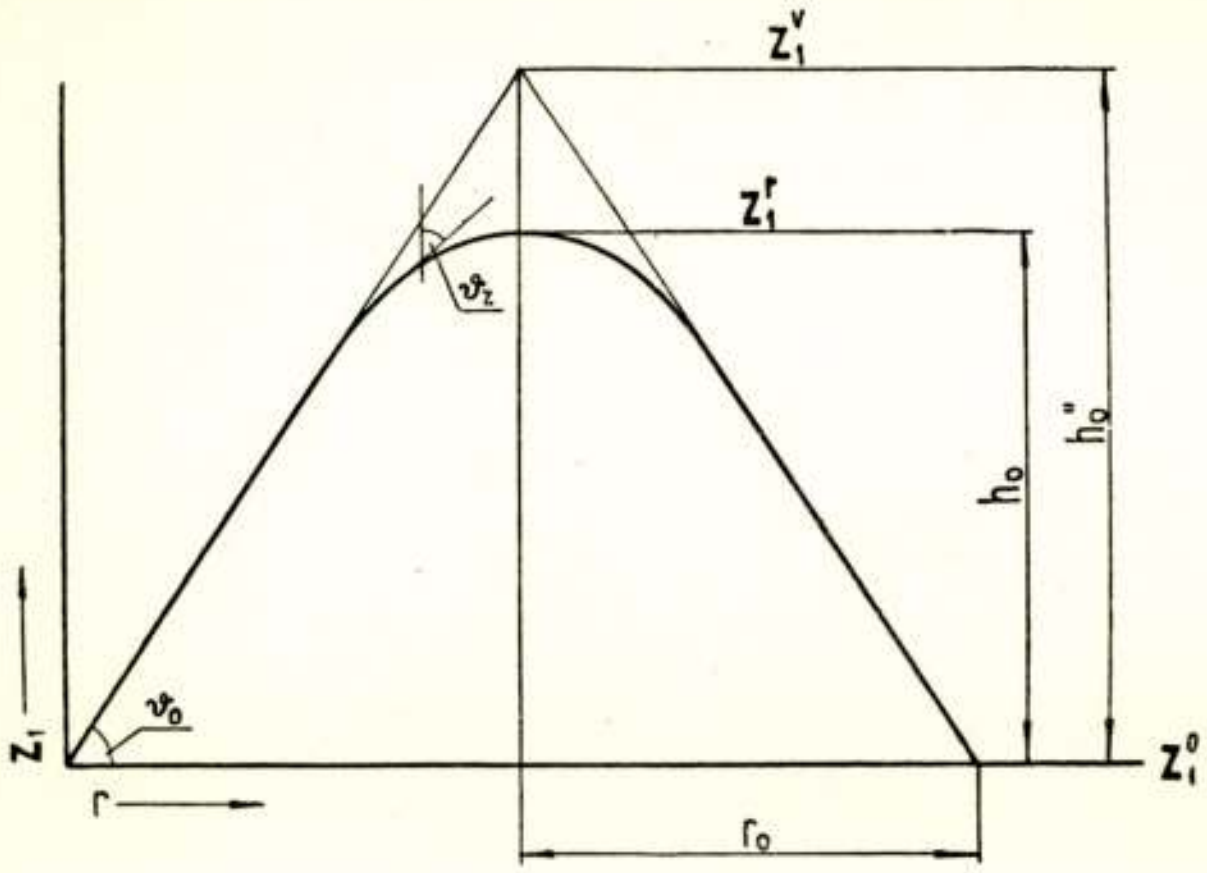


Fig. 2.

$$(-i)^{m+1} k_o \left[R(\vartheta_o)\right]^m e^{-m \frac{p}{\eta} \cos \vartheta_o} \frac{e^{f_o}}{\sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o}}$$

$$= (-i)^m \left[R(\vartheta)_o\right]^m e^{-m \frac{p}{\eta} \cos \vartheta_o} \frac{e^{f_o}}{\frac{r}{\sin \vartheta_o} \sqrt{1 - \frac{2 \sin^2 \vartheta_o}{k h_o''}}} \tag{31}$$

Voor de andere deelpotentialen (22) gelden soortgelijke uitdrukkingen

IV. *Discussie van de uitdrukking voor de vectorpotentiaal*

Formule (31), welke in III werd afgeleid, heeft betrekking (zie fig. 1) op een straal, welke $m \times$ tusschen de ionospheer en het aardoppervlak heen en weer gaat.

De termen $[R(\vartheta_o)]^m$ resp. $e^{-m \frac{p}{\eta} \cos \vartheta_o}$ stellen de phasedraai-

ing en demping aan het aardoppervlak resp. de demping in de ionospheer bij de herhaalde reflecties voor.

De exponent f_o, welke de phasedraaiing in de ionospheer aangeeft, houdt verband met den z.g. „optischen weg"; de noemer van den laatsten term in (31) bevat den factor $\frac{r}{\sin \vartheta_o}$ zijnde de ruimtelijke verzwakking van den straal, alsmede den factor $\sqrt{1 - \frac{2 \sin^2 \vartheta_o}{k h_o''}}$, welke zal worden geinterpreteerd als een „convergentiefactor".

Een nadere toelichting t.a.v. de physische beteekenis van den laatsten term in (31) moge hier volgen, alsmede van de grootheden (18) (19) h_o' resp. h_o'', welke in II werden geïntroduceerd.

De grootheden h_o en h_o''

In Fig. 2 is het traject van een in de ionospheer gebogen straal weergegeven; de z_1-coördinaat z_1^r van het omkeerpunt is gegeven door (8) en die van het aardoppervlak door z_1^o, waarbij r_o de sprong van één „hop" voorstelt. Het verband tusschen z_1^o en r_o wordt allereerst afgeleid.

$dr = \int d z_1 \, tg \, \vartheta_z$ (32). Na substitutie van (6) en invoering van de brekingsindex μ en inplaats van $\sqrt{\varepsilon}$ en van $y = \frac{\eta e^{k z_1}}{\cos^2 \vartheta_o}$ (33) verkrijgt men

$$dr = \int \frac{\sin^2 \vartheta_o}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \vartheta_o}} d z_1 = \frac{tg \, \vartheta_o}{k} \int \frac{dy}{y \sqrt{1 - y}} \tag{34}$$

De integratiegrenzen zijn bepaald door de waarden in het omkeerpunt, gegeven door $1 - \eta e^{k z_1^r} = \sin^2 \vartheta_o$ of $y = 1$, en het aardoppervlak, waarvoor y zeer klein is. (z_1 zeer groot en negatief.)

$$r_o = - \frac{2 \, tg \, \vartheta_o}{k} \, ln \, \frac{1 - \sqrt{1 - y}}{1 + \sqrt{1 - y}} \Bigg/ {}^{y=1}_{y \; z_1 = z_1^o}$$

$$= - \frac{2 \, tg \, \vartheta_o}{k} \left[\tfrac{1}{2} \, ln \, \eta + \tfrac{1}{2} \, k \, z_1^o - ln \cos \vartheta_o - ln \, 2 \right] \tag{35}$$

$$z_1^o = - r_o \, ctg \, \vartheta_o - \frac{ln \, \eta}{k} + \frac{2 \, ln \cos \vartheta_o}{k} + \frac{2 \, ln \, 2}{k} \tag{36}$$

Uit de formule voor z_1^r (8) leidt men de reflectiehoogte h_o af

$$h_o = z_1^r - z_1^o = r_o \, ctg \, \vartheta_o - \frac{2 \, ln \, 2}{k}, \tag{37}$$

waaruit i.v.m. (19)

$$h_o'' = r_o \, ctg \, \vartheta_o, \tag{38}$$

hetgeen de bevestiging inhoudt van h_o'' als de virtueele hoogte.

De grootheden f_o en h_o'

De optische weg is gegeven door $\int \mu \, ds$, d.i. den weg door den straal in vacuo doorloopen in den tijd, dat het golffront (gelijkphasig vlak) zich van zender naar ontvanger voortbeweegt.

$$\int \mu \, ds = \int \frac{\mu \, d \, z}{\cos \vartheta_z} = 2 \int_{z_1^o}^{z_1^r} \frac{\mu^2 \, dz}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \vartheta_o}} =$$

$$= \frac{2}{k \cos \vartheta_o} \int \frac{dy}{y \sqrt{1 - y}} - \frac{2 \cos \vartheta_o}{k} \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y}} \approx$$

$$\approx - \frac{4}{k \cos \vartheta_o} ln \frac{\sqrt{y}}{2} - \frac{4 \cos \vartheta_o}{k} \sqrt{1 - y}, \text{ waarbij } y = y_{z_1^o}$$

en na substitutie van (35)

$$\int \mu \, ds = P_{opt.} = \frac{2 \, r_o}{\sin \vartheta_o} - \frac{4}{k} \cos \vartheta_o . \tag{39}$$

Met inachtname van (18) (19) en (37) herleidt men de laatste uitdrukking als volgt

$$P_{opt.} = \frac{2}{\cos \vartheta_o} \left[h_o'' - \frac{2}{k} + \frac{2}{k} \sin^2 \vartheta_o \right] = \frac{2}{\cos \vartheta_o} \left[h_o' + \frac{2}{k} \sin^2 \vartheta_o \right], \tag{40}$$

waarin

$$h_o' + \frac{2}{k} \sin^2 \vartheta_o = h_o''' \tag{41}$$

als „optische hoogte" is te beschouwen.

In fig. 3 zijn de geometrische verhoudingen der grootheden schematisch aangegeven.

$ZM = r_o$ $\quad MT = h_o''$ $\quad MR = h_o$ $\quad MB = h_o'$ en volgens (18) (19)

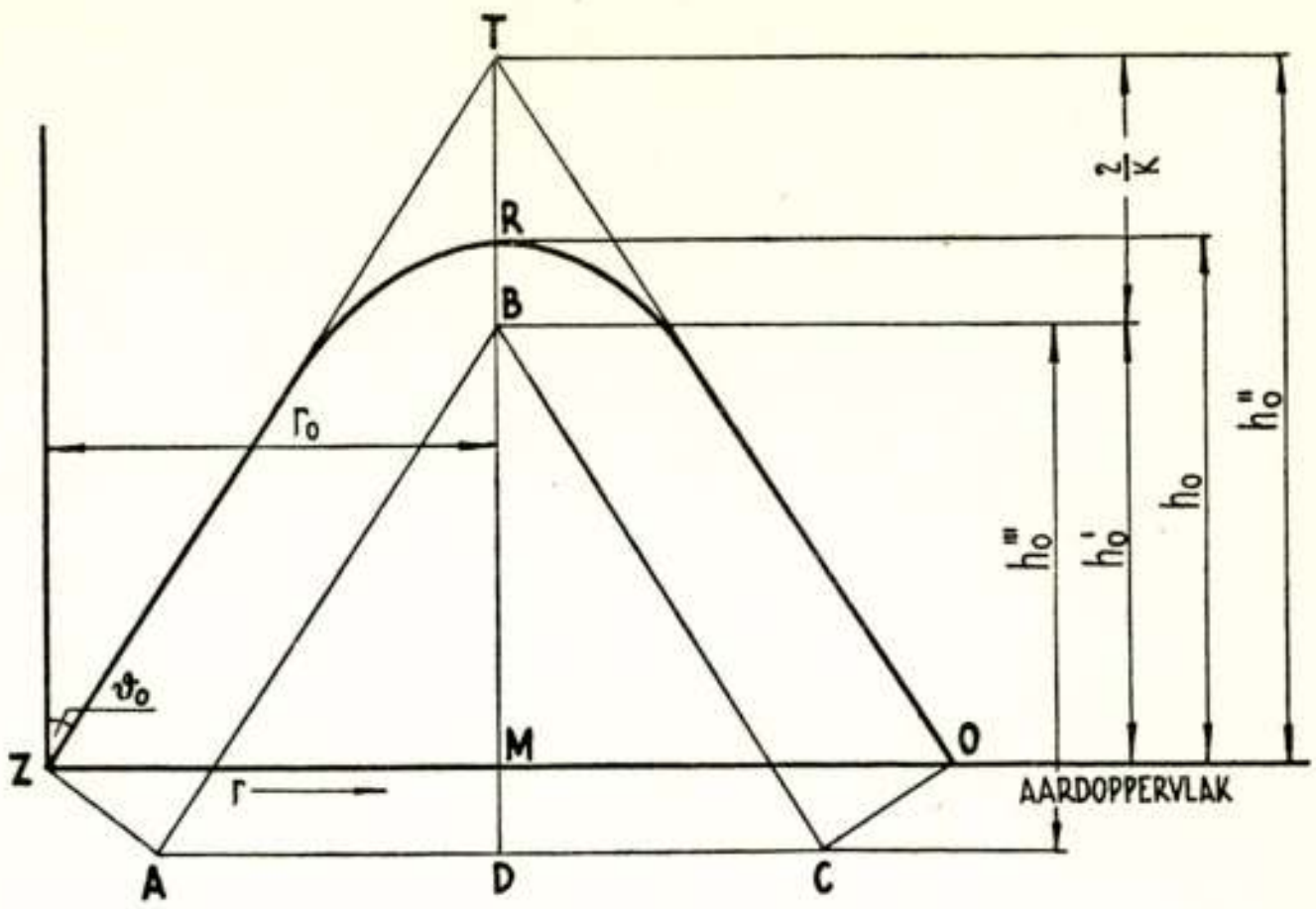


Fig. 3.

$$BT = \frac{2}{k}, \text{ waaruit } MD = \frac{2}{k}\sin^2\vartheta_o \text{ en i.v.m. (41)}$$

$$BD = h_o''' = \text{optische hoogte}$$

$ZTO = P_{virt.}$ = virtueele weg $\qquad$ ZRO = weg van den straal

$$ABC = P_{opt.} = \text{optische weg.}$$

De afstand per „sprong" in de richting van de r-coördinaat is $2\,r_o$; na m reflecties is $r = 2\,m\,r_o$. 42)

Door invoering van deze laatste betrekking en (38) verkrijgt men voor (28), de uitdrukking voor f_o

$$f_o = i\,k_o\,m\left[\frac{2\,r_o}{\sin\vartheta_o} - \frac{4}{k}\cos\vartheta_o\right] = i\,m\,\frac{2\,\pi}{\lambda_o}\,P_{opt.}, \qquad (43)$$

waarmede de relatie tusschen f_o en $P_{opt.}$ is aangegeven. $m\,P_{opt.}$ is de weg in vacuo, welke hetzelfde aantal golflengten λ_o als

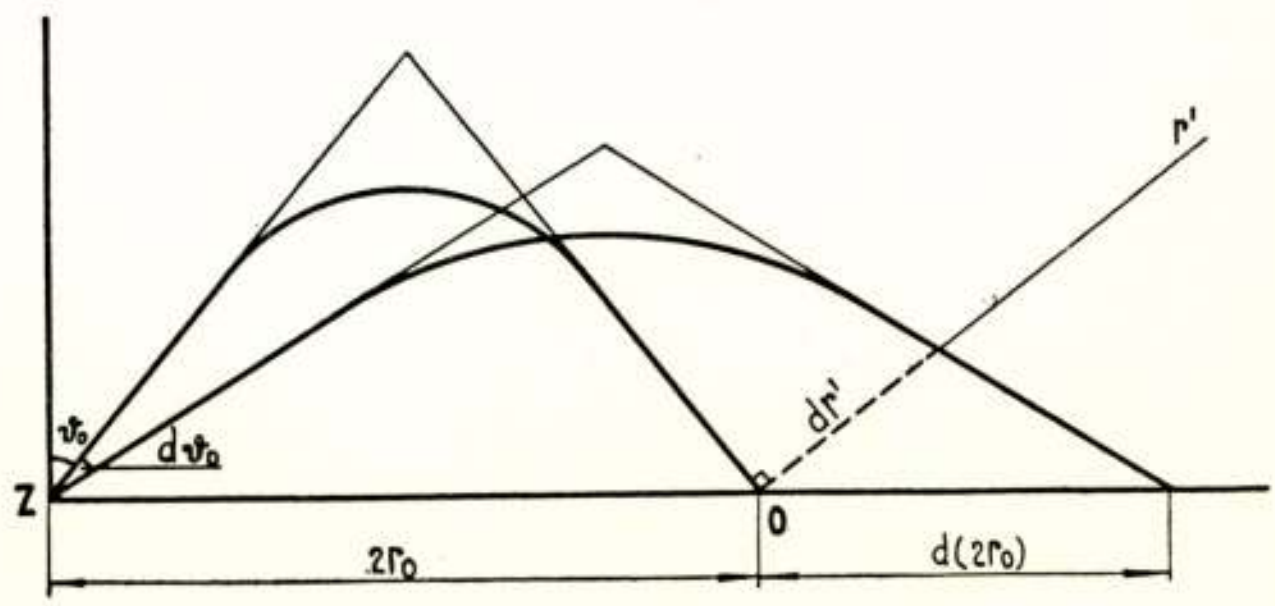


Fig. 4. De convergentiefactor.

de werkelijke baan bevat; de beteekenis van f_0 in (31) als een phasefactor komt aldus nogmaals naar voren.

De convergentiefactor (fig. 4.)

Uit (35) leidt men af

$$\frac{d(2r_0)}{d\vartheta_0} = \frac{2\,r_0}{\sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0} - \frac{4}{k} \cdot \frac{\sin^2\vartheta_0}{\cos^2\vartheta_0} \tag{44}$$

en voor $d\,r_1$ = loodrechten afstand tusschen twee stralen met ∞-klein richtingsverschil (Fig. 4).

$$\frac{d\,r_1}{d\,\vartheta_0} = \frac{2\,r_0}{\sin\vartheta_0} - \frac{4}{k}\,\frac{\sin^2\vartheta_0}{\cos\vartheta_0} \tag{45}$$

De noemer van den laatsten term van (31) is een maat voor

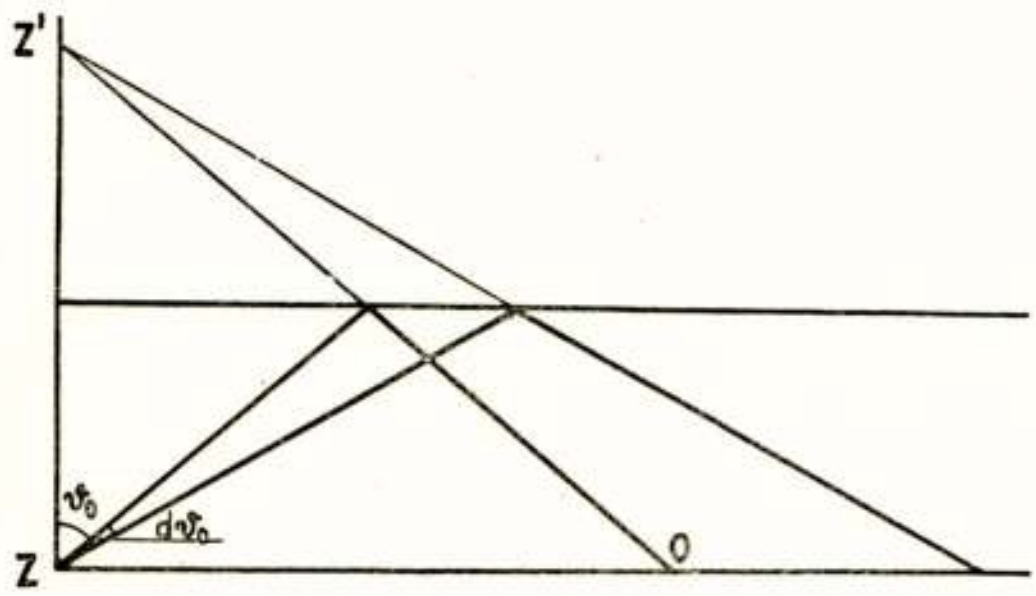


Fig. 5.

de ruimtelijke verzwakking van den straal; m.b.v. (45) en van de betrekking $P_{virt.} = \dfrac{2\,r_0}{\sin\vartheta_0}$ herleidt men deze als volgt:

$$\frac{2}{\sin\vartheta_0}\sqrt{1 - \frac{2\sin^2\vartheta_0}{k\,h_0''}} = \sqrt{\frac{r}{\sin\vartheta_0}}\sqrt{\frac{r}{\sin\vartheta_0} - \frac{4}{k}\,m\,\frac{\sin^2\vartheta_0}{\cos\vartheta_0}} =$$

$$= m\sqrt{P_{virt.}\,\frac{d\,r_1}{d\,\vartheta_0}} \tag{46}$$

Indien de verandering der electrische grootheden in de ionospheer een discontinu karakter verkrijgt (reflecteerend vlak), welk geval (vergelijk II) overeenkomt met $k \to \infty$, zijn $\dfrac{d\,r_1}{d\,\vartheta_0}$ en $P_{virt.}$ gelijk en (46) $= m\,P_{virt.} = m\,Z'\,O$. (Zie fig. 5).

In deze laatste betrekking komt de afname van de potentiaal (en van de veldsterkte), evenredig met den door den straal

doorloopen weg, tot uiting, overeenkomende met de verzwakking in de vrije ruimte.

In het geval van een reflecteerend vlak zijn de reflectiehoogten voor alle stralen gelijk.

De afname van de stralingsintensiteit wordt bepaald door de „energiespreiding", d.i. het oppervlak van de doorsnede van den stralingsbundel bij O voor een stralingskegel met een gegeven ruimtehoek bij Z. De grootte van het oppervlak O is gegeven door twee kromteradii; één *in het vlak van teekening* en de andere *loodrecht* op dit vlak. In het geval van reflectie tegen een reflecteerend vlak is het kromtemiddelpunt van den gereflecteerden bundel Z' en zijn de beide radii gelijk en $= Z' O$.

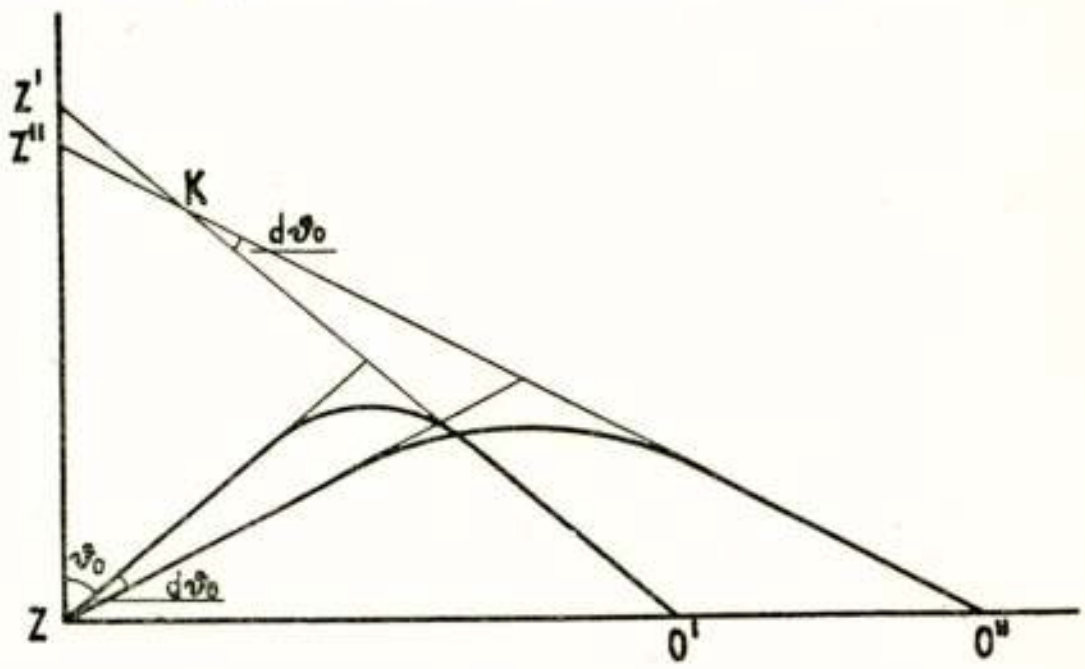


Fig. 6.

Veranderen daarentegen de eigenschappen van de ionospheer geleidelijk, zoo verkrijgt men de situatie, voorgesteld in Fig 6. De reflectiehoogte (evenals de virtueele hoogte) van een straal daalt met toenemende ϑ_0. De radius van den gereflecteerden stralingsbundel loodrecht op het vlak van teekening is gelijk aan die in het eerste geval $= Z' O$; de kromteradius in het vlak van teekening is daarentegen *kleiner* $= K O$, waarbij $K O = \frac{dr_1}{d\vartheta}$. (zie Fig. 4).

De afname van het veld is derhalve gegeven door

$$\sqrt{P_{virt.} \cdot \frac{dr_1}{d\vartheta}}$$

voor één „sprong" en voor een aantal van m door (46). Door het verlagen van het omkeerpunt met toenemende ϑ_0 ontstaat een „convergentie" van de stralen, waaruit een grootere veldsterkte resulteert dan bij gelijkblijvend niveau van het omkeerpunt.

's-Gravenhage, Maart 1950.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Periodieke en niet-periodieke trillingen bij een ongeveer in resonantie met een opgedrukte wisselspanning verkerende trillingskring, bevattende een spoel met ijzerkern

door J. M. Op den Orth

SUMMARY

Periodic and non-periodic oscillations in an electrical circuit containing a condenser, a coil with an iron core and no or a small resistance, are considered, supposing the circuit nearly tuned to a small periodic e. m. f. impressed on the circuit. Assuming the parameter, representing the non-linearity of the inductance, being small, „stroboscopic phase-portraits" are theoretically derived, showing the behaviour of all particular approximate solutions of the differential equation. Periodic (forced) oscillations are represented by singular points (generally two isolated points and a saddle-point). If damping is zero, all other solutions correspond to closed curves around one or the other of the isolated points, or around both points. If damping is not zero the curves become spirals tending to one or the other of the isolated points (corresponding to stable forced solutions) Jump phenomena are discussed. The importance of the solution curves through the third singular point (a saddle-point representing an unstable forced oscillation) is made clear.

§ 1

Het is reeds meer dan 40 jaar bekend, dat bij een trillingskring, bevattende de serieschakeling van een condensator en een spoel met ijzerkern, eigenaardige trillingsverschijnselen kunnen optreden, indien in die kring een spanningsbron wordt opgenomen met een frequentie, welke ongeveer gelijk is aan de eigen frequentie van die kring. Vele publicaties zijn reeds aan deze verschijnselen gewijd. We zullen er hiervan slechts twee uit de laatste jaren noemen, n.l. een publicatie van

Friedrichs en Stoker uit het jaar 1943[1]) en een dit jaar verschenen boek van Stoker[2]). In beide wordt het bovenbedoelde geval uitvoerig behandeld en men mag wel aannemen, dat zij een ongeveer juist beeld geven van de stand van het theoretisch onderzoek van deze schakeling.

We constateren dan uit deze publicaties, dat men reeds op verschillende wijzen kon aantonen, dat er drie periodieke oplossingen kunnen voorkomen van de deze schakeling beheersende differentiaalvergelijking; dat men verder kon aantonen, dat twee dezer oplossingen stabiel en de derde labiel kunnen worden genoemd en dat tenslotte onder bepaalde omstandigheden een overspringen van de ene stabiele oplossing in de andere kan plaats vinden (kipverschijnsel). Er blijken echter ook nog verschillende onopgehelderde punten te bestaan. Zo kan men zich de volgende vragen stellen:

a. Kan men ook in dit geval (evenals bij een trillingskring met een spoel *zonder* ijzerkern) een trillingstoestand onderscheiden, die als de som van een gedwongen trilling en een „vrije" trilling kan worden opgevat, al zal de vrijheid dezer „vrije" trilling uiteraard nooit zo volledig kunnen zijn als in het lineaire geval?
b. Zal er ook kippen van de ene stabiele periodieke trilling naar de andere kunnen optreden, indien de keten weerstandsloos wordt gedacht, of is dit verschijnsel gekoppeld aan de aanwezigheid van weerstand?
c. Bij welke beginvoorwaarden wordt de ene stabiele trillingstoestand en bij welke de andere uiteindelijk bereikt?

Wij zullen in dit artikel trachten een antwoord op deze vragen te vinden.

§ 2

In een keten volgens fig. 1, waarbij in serie zijn opgenomen een wisselspanningsbron met de spanning $e_m \sin \omega \tau$, een condensator met de capaciteit C, een weerstand r en een spoel met ijzerkern, waarin de flux Φ optreedt, wordt de electrische trilling, zoals bekend is en gemakkelijk is af te leiden, beheerst door de differentiaalvergelijking:

---

[1]) „Quarterly of Applied Mathematics", Juli 1943 blz. 97 e.v.

[2]) „Non-linear vibrations in mechanical and electrical systems" (New York 1950).

$$\frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} + \frac{r}{L}\left(1 + \frac{3 L \Phi^2}{\lambda}\right)\frac{d\Phi}{d\tau} + \frac{1}{LC}\left(\Phi + \frac{L}{\lambda}\Phi^3\right) = \omega e_m \cos \omega \tau . \quad (1)$$

Hierbij is voor de magnetiseringskromme van het magnetische materiaal van de spoelkern genomen de door Biermanns[1]) voor het eerst toegepaste benadering:

$$i = \frac{\Phi}{L} + \frac{\Phi^3}{\lambda} .$$

De differentiaalvergelijking (1) is niet elementair op te lossen (althans in de vele publicaties, die er reeds aan zijn gewijd, is een dergelijke oplossing niet te vinden), zelfs niet voor het vereenvoudigde geval, dat $r = 0$ wordt gesteld en dus de term met $\frac{d\Phi}{d\tau}$ ontbreekt. (Deze vereenvoudigde vergelijking wordt in de nieuwere Amerikaanse literatuur vaak de vergelijking van

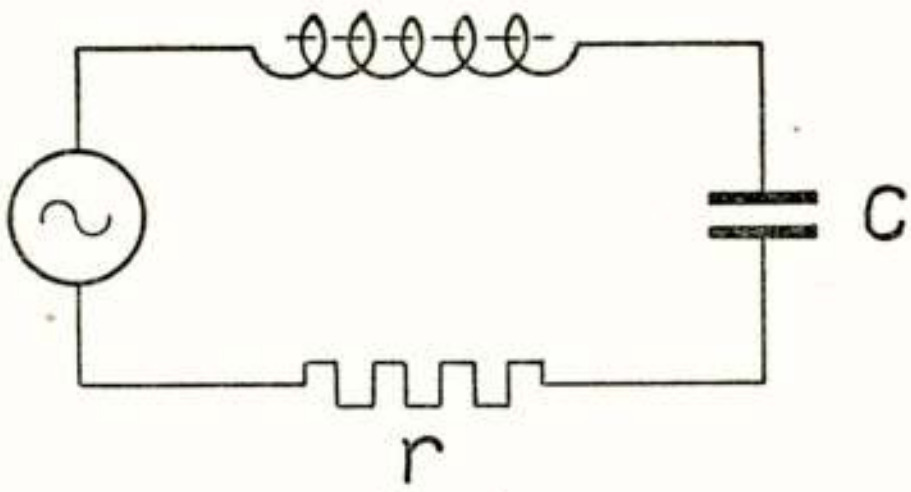


Fig. 1.

Duffing genoemd). Anderzijds levert het echter geen principiële moeilijkheden op, om bij gegeven beginvoorwaarden de daarbij behorende particuliere oplossing van vergelijking (1) te bepalen. Grafisch is dit immers altijd mogelijk. Laten we b.v. aannemen, dat de beginvoorwaarden voor $\tau = 0$ zijn $\Phi = a_0$ en $\frac{d\Phi}{d\tau} = a_1$, dan kan men uit de differentiaalvergelijking (1) de daarbij behorende beginwaarde van $\frac{d^2\Phi}{d\tau^2}$ berekenen.

Men heeft dan genoeg gegevens om de kromtestraal en het krommingsmiddelpunt van de door a_0 en a_1 bepaalde integraalkromme ten tijde $\tau = 0$ te bepalen. De gezochte integraalkromme

[1]) „Archiv für Elektrotechnik" 1915, Band III, blz. 345.

valt dan over een kleine afstand met de aldus bepaalde krommingscirkel samen. Men kan dus de integraalkromme bepalen door deze krommingscirkel over een klein stuk te volgen tot het punt, bepaald door $\tau = \tau_1$, voor dit punt weer de krommingscirkel te tekenen, enz.[1]). Deze methode is bruikbaar, als men tevreden is met de particuliere oplossing gedurende een niet al te lange tijd na het beginmoment, dus b.v. gedurende een periode van de gedwongen trilling, maar voor het bepalen van de oplossing voor zeer grote waarden van τ (en de oplossing voor de waarde $\tau = \infty$ interesseert de technicus juist het meest!) is zij practisch onbruikbaar.

Men kan de bij de gegeven beginvoorwaarden behorende particuliere oplossing gemakkelijker vinden, indien men over een mechanische integreerinrichting („differential analyzer") beschikt en deze methode is dan ook reeds gevolgd door Travis en Weygandt[2]). Maar ook dan wordt de oplossing voor $\tau = \infty$ dikwijls met moeite verkregen. En bovendien, wat de technicus en de physicus nodig heeft, is in het algemeen niet de particuliere oplossing bij één bepaald stel beginvoorwaarden, maar een oplossing in zodanige vorm, dat hij een inzicht krijgt in wat er gebeurt, indien de aanvangsvoorwaarden of de verschillende in de differentiaalvergelijking voorkomende grootheden (parameters) binnen een bepaald gebied worden gevarieerd.

In dit opzicht zijn oplossingsmethoden gunstiger, die een benaderde oplossing geven, die weliswaar slechts binnen bepaalde grenzen van de parameters bruikbaar zijn, maar daar dan ook aan de zojuist genoemde eisen voldoen.

Een dezer methoden is die, welke Poincaré voor de benaderde oplossing van differentiaalvergelijkingen uit de astronomie toepaste en welke in de latere jaren ook meermalen bij niet-lineaire trillingsproblemen is aangewend.

Zij berust daarop, dat men de oplossing schrijft als een machtreeks van een in de differentiaalvergelijking voorkomende parameter, waarbij de coëfficienten van elk dier machten nader te bepalen functies van de onafhankelijk variabele zijn. Deze functies worden dan bepaald uit de voorwaarden, dat, wanneer men deze machtreeks in de op te lossen differentiaalvergelijking substitueert, de termen, welke de parameter niet bevatten, tegen elkaar moeten wegvallen, eveneens de termen, welke de

---

[1]) Bieberbach: Lehrbuch der Differentialgleichungen (1930) blz. 141.

[2]) „Transactions A. I. E. E." 1938, blz. 423.

parameter in de eerste macht, bezitten, enz. Poincaré heeft aangetoond, dat deze machtreeks voor voldoende kleine waarden van de parameter en voor niet te grote waarden van de onafhankelijk variabele convergeert en dus een oplossing van de differentiaalvergelijking vormt[1]). Bij zeer kleine waarden van de parameter zullen dan de twee eerste termen van de reeks, (dus die, waarin de parameter *niet*, en die waarin hij in de eerste macht voorkomt) reeds een voldoende benadering geven.

In het volgende zullen wij laten zien, dat deze manier niet alleen zeer geschikt is voor het vinden van periodieke oplossingen van vergelijking (1), maar dat zij ook zo kan worden uitgebouwd, dat een duidelijk inzicht wordt verkregen in sommige niet-periodieke verschijnselen.

§ 3

We herleiden eerst de vergelijking (1) tot een eenvoudiger gedaante door te definiëren $\omega \tau = t$.

De differentiaalvergelijking krijgt dan de gedaante:

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{r}{\omega L}\left(1 + \frac{3L}{\lambda}\Phi^2\right)\frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{\omega^2 LC}\left(\Phi + \frac{L}{\lambda}\Phi^3\right) = \frac{e_m}{\omega}\cos t .$$

Vervolgens stellen we:

$$\frac{1}{\omega^2 LC} = 1 - \alpha ; \qquad \frac{L}{\lambda} = \gamma ;$$

$$\frac{e_m}{\omega} = \beta ; \qquad \frac{r}{\omega L} = \varrho ;$$

en nemen dan aan, dat we α, β, γ en ϱ als klein ten opzichte van 1 mogen beschouwen, zodat die termen, waarin het product van deze grootheden voorkomt, kunnen worden verwaarloosd. Wanneer we dan nog in plaats van Φ de gemakkelijkere letter x schrijven, krijgen we onder andere rangschikking der termen de volgende vergelijking:

$$\ddot{x} + x = -\varrho \dot{x} + \alpha x - \gamma x^3 + \beta \cos t . \qquad (2)$$

---

[1]) Poincaré „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" Tome I, (1892) blz. 51 e.v.

We stellen nu:

$$x = x_0 + \varrho x_\varrho + \alpha x_\alpha + \gamma x_\gamma + \beta x_\beta$$

dus we schrijven de oplossing als een machtreeks van de parameters ϱ, α, γ en β en nemen aan, dat deze parameters zo klein zijn, dat de hogere machtstermen van de reeks voor waarden van t, die niet groter zijn dan 2π, kunnen worden verwaarloosd. (Door deze parameters maar voldoende klein aan te nemen, kan hier altijd aan worden voldaan). Stellen we nu

$\varrho x_\varrho + \alpha x_\alpha + \gamma x_\gamma + \beta x_\beta = x_1$. Dan wordt dus: $x = x_0 + x_1$.

Vullen we dan deze waarde van x in in de vergelijking (2), dan verkrijgen we:

$$\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1 + x_0 + x_1 = -\varrho(\dot{x}_0 + \dot{x}_1) + \alpha(x_0 + x_1) - \gamma(x_0 + x_1)^3 + \beta \cos t$$

De term met $\varrho \dot{x}_1$ bestaat uit componenten, die in het beschouwde interval te verwaarlozen zijn, omdat zij van de orde van grootte van de 2e macht van de kleine parameter zijn.

Hetzelfde geldt voor de term αx_1, terwijl het ook duidelijk zal zijn, dat van de term $\gamma(x_0 + x_1)^3$ alleen de term γx_0^3 behoeft te worden aangehouden.

Vergelijking (2) wordt dus:

$$\ddot{x}_0 + x_0 + \ddot{x}_1 + x_1 = -\varrho \dot{x}_0 + \alpha x_0 - \gamma x_0^3 + \beta \cos t .$$

Hieraan kan worden voldaan door te stellen:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0 \tag{3a}$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\varrho \dot{x}_0 + \alpha x_0 - \gamma x_0^3 + \beta \cos t . \tag{3b}$$

Voor x_0 wordt gevonden $x_0 = A \cos(t + \varphi)$. De integratieconstanten A en φ kiezen we zo, dat de beginwaarde x_0 ten tijde $t = 0$ gelijk is aan de gegeven beginwaarde (a_0) van x ten tijde $t = 0$, terwijl verder $\dot{x}_0$ ten tijde $t = 0$ gelijk gemaakt wordt aan de waarde (a_1) van $\dot{x}$ ten tijde $t = 0$, dus moet zijn:

$$A \cos \varphi = a_0$$
$$-A \sin \varphi = a_1 .$$

Vullen we de gevonden waarde voor x_0 in in vergelijking (3b), dan wordt deze:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \varrho A \sin(t+\varphi) + \alpha A \cos(t+\varphi) - \gamma A^3 \cos^3(t+\varphi) + \beta \cos t \tag{4}$$

De vergelijking (4) is gemakkelijk op te lossen; de integratie-

constanten moeten daarbij zo worden gekozen, dat zowel x_1 als $\dot{x}_1$ ten tijde $t = 0$ de waarde nul hebben. Daarmee hebben we een (benaderde) oplossing van vergelijking (2) gekregen, die geldt in het tijdsinterval $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Maar alvorens deze oplossing nader te bestuderen, vragen we ons af, hoe we het gevonden resultaat physisch kunnen interpreteren.

Dat x_0 de eigen trilling van de keten voorstelt voor $\alpha = \beta = \gamma = \varrho = 0$ is onmiddellijk duidelijk. De met deze eigen trilling gepaard gaande stroom veroorzaakt spanningen over de weerstand r, over de reactantie, die de verstemming α vertegenwoordigt en over een element, dat voor de term met Φ^3 in de vergelijking van Biermanns verantwoordelijk kan worden gesteld. Deze spanningen, tezamen met de opgedrukte spanning, leveren de termen in het rechter lid van vergelijking (4). Zij werken tezamen met de opgedrukte wisselspanning in op de keten, waarvoor geldt $\alpha = \gamma = \varrho = 0$, (dus de ongedempte keten met de eigen periode 2π) en geven daarbij aanleiding tot de trilling, die door x_1 wordt voorgesteld.

§ 4.

We zullen nu onderzoeken, of er bepaalde waarden voor A en φ zijn aan te wijzen, waarvoor x periodieke oplossingen met de periode 2π bezit. Daar x_0 de periode 2π heeft, betekent dit, dat ook x_1 periodiek moet zijn met de periode 2π. Daar $\cos^3(t+\varphi)$ te herleiden is tot $\frac{1}{4}\cos 3(t+\varphi) + \frac{3}{4}\cos(t+\varphi)$, blijkt het rechterlid van vergelijking (4) te bestaan uit één term met de periode $\frac{2\pi}{3}$ en een aantal termen met de periode 2π. De eerstbedoelde term geeft aanleiding tot een component van x_1 met de periode $\frac{2\pi}{3}$, dus ten tijde $t = 2\pi$ heeft die component, alsook de eerste afgeleide ervan, dezelfde waarde als ten tijde $t = 0$. Deze component moet dus wèl in aanmerking genomen worden, als men de juiste krommevorm van de resulterende trilling wil bepalen, maar op het al of niet optreden van een periodieke trilling oefent hij geen enkele invloed uit. Anders is het met de termen met de periode 2π, dus met een periode gelijk aan de eigen trillingstijd van de trillingsketen. Het is bekend, dat deze termen aanleiding geven tot niet-periodieke componenten van x_1, die lineair met de tijd toe- of afnemen. Opdat er een periodieke oplossing met de periode 2π zij, moeten

dus de termen in het rechterlid van verg. (4) welke de periode 2π hebben, tegen elkaar wegvallen. Dit betekent dus, dat moet gelden:

$$\varrho A \sin(t+\varphi) + \alpha A \cos(t+\varphi) - \tfrac{3}{4}\gamma A^3 \cos(t+\varphi) + \beta \cos t = 0. \quad (5)$$

Indien we voor $\beta \cos t$ schrijven:

$$\beta \cos t = \beta \cos(t+\varphi-\varphi) = \beta\{\cos(t+\varphi)\cos\varphi + \sin(t+\varphi)\sin\varphi\}$$

dan valt, daar zowel de sinustermen als de cosinustermen elkaar moeten compenseren, vergelijking (5) uiteen in de twee volgende vergelijkingen:

$$\varrho A \sin(t+\varphi) + \beta \sin(t+\varphi)\sin\varphi = 0$$

en

$$\alpha A \cos(t+\varphi) - \tfrac{3}{4}\gamma A^3 \cos(t+\varphi) + \beta \cos(t+\varphi)\cos\varphi = 0.$$

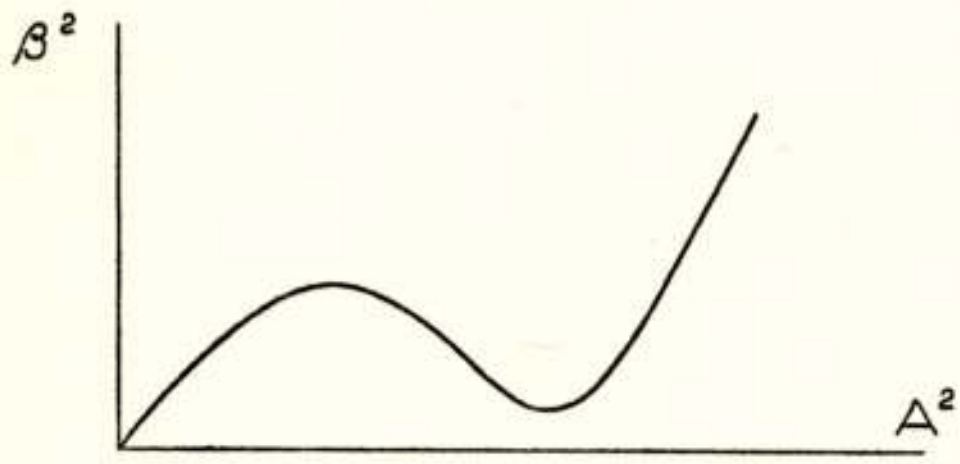


Fig. 2.

Hieruit volgt dus:

$$\varrho A + \beta \sin\varphi = 0 \quad (6a)$$

$$\alpha A - \tfrac{3}{4}\gamma A^3 + \beta \cos\varphi = 0. \quad (6b)$$

We leiden hieruit gemakkelijk af:

$$\beta^2 = A^2\{\varrho^2 + (\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A^2)^2\} \quad (7a)$$

$$tg\,\varphi = \frac{\varrho}{\alpha - \frac{3}{4}\gamma A^2}. \quad (7b)$$

We zien, dat we formeel dezelfde formules krijgen als in het lineaire geval ($\gamma = 0$), mits men in de plaats van α neemt $\alpha - \frac{3}{4}\gamma A^2$.

Als men β^2 uitzet als functie van A^2 en aanneemt $\alpha > 0$ en $\varrho > 0$ (maar niet te groot), krijgt men de bekende kromme volgens fig. 2.

Het geval $\varrho = 0$ geeft, zoals uit (6a) en (6b) volgt:

$$\sin\varphi = 0\,;\ \text{dus}\ \varphi = 0\ \text{of}\ \varphi = \pi\,;$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha A - \tfrac{3}{4}\gamma A^3 &= -\beta \quad (\text{voor}\ \varphi = 0) \\ \alpha A - \tfrac{3}{4}\gamma A^3 &= \beta \quad\ \ (\text{voor}\ \varphi = \pi) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

welke laatste vergelijkingen worden voorgesteld door de welbekende kromme volgens fig. 3.

Interessant is ook het verband tussen α en A bij constante β en ϱ.

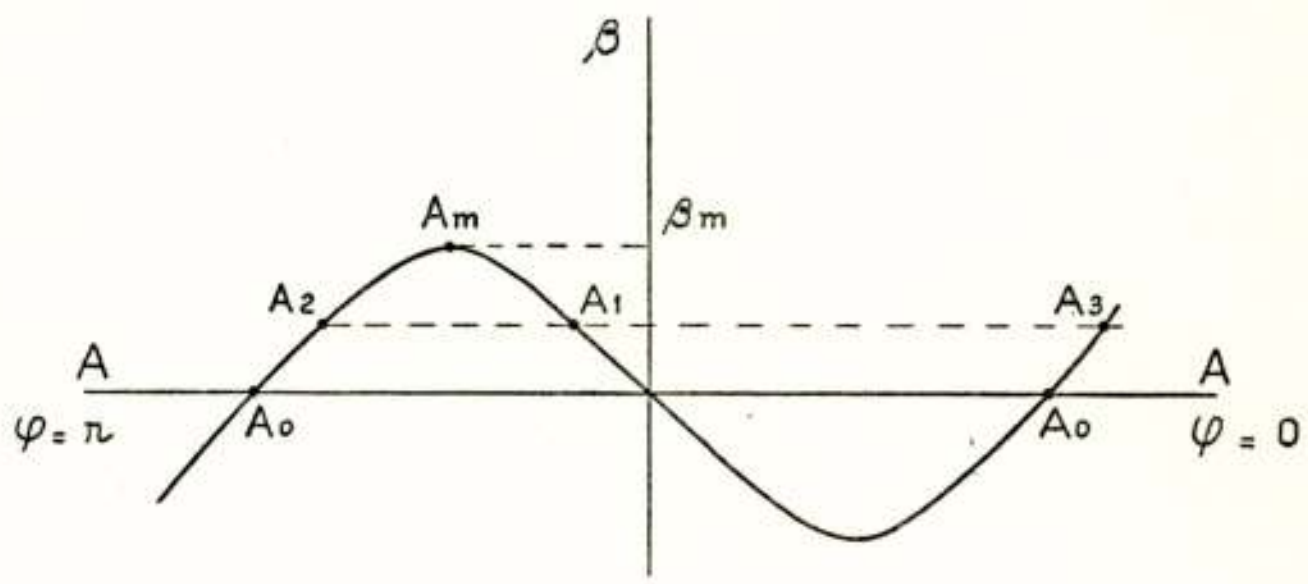


Fig. 3.

We herleiden (7a) tot:

$$A^2\left\{\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A^2\right\}^2 = \beta^2 - A^2\varrho^2$$

waaruit volgt:

$$\alpha = \tfrac{3}{4}\gamma A^2 \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{A^2} - \varrho^2}\,.$$

Bij iedere waarde van A vindt men dus twee waarden van α, welke symmetrisch liggen ten opzichte van de kromme $\alpha = \frac{3}{4}\gamma A^2$. Dit is de bekende „omgevallen" resonantiekromme (zie fig. 4). De top van de kromme ligt bij

$$\frac{\beta^2}{A^2} - \varrho^2 = 0\,,\ \text{dus bij}\ A = \frac{\beta}{\varrho}\,.$$

Deze periodieke oplossingen zijn (zoals in § 1 al werd opgemerkt) reeds eerder verkregen, zij het dan volgens een iets andere methode. Wij zullen hier dan ook niet verder over uitweiden. Tot nu toe schijnt er echter niets over gepubliceerd te zijn, hoe

de oplossing wordt, wanneer de beginvoorwaarden aanmerkelijk afwijken van die, welke onmiddellijk tot een periodieke oplossing leiden.

§ 5.

We zullen dus nu aannemen, dat de beginvoorwaarden A en φ ten tijde $t = 0$ zo gekozen zijn, dat niet juist een periodieke oplossing optreedt. De oplossing van de beide vergelijkingen (3a) en (4) is direct neer te schrijven, maar we dienen te bedenken, dat deze oplossingen slechts een voldoende benadering van vergelijking (2) geven in het interval $0 \leqq t \leqq 2\pi$. We zullen nu zo te werk gaan, dat we met behulp van deze oplossingen de waarde van x en $\dot{x}$ ten tijde $t = 2\pi$ bepalen. Deze

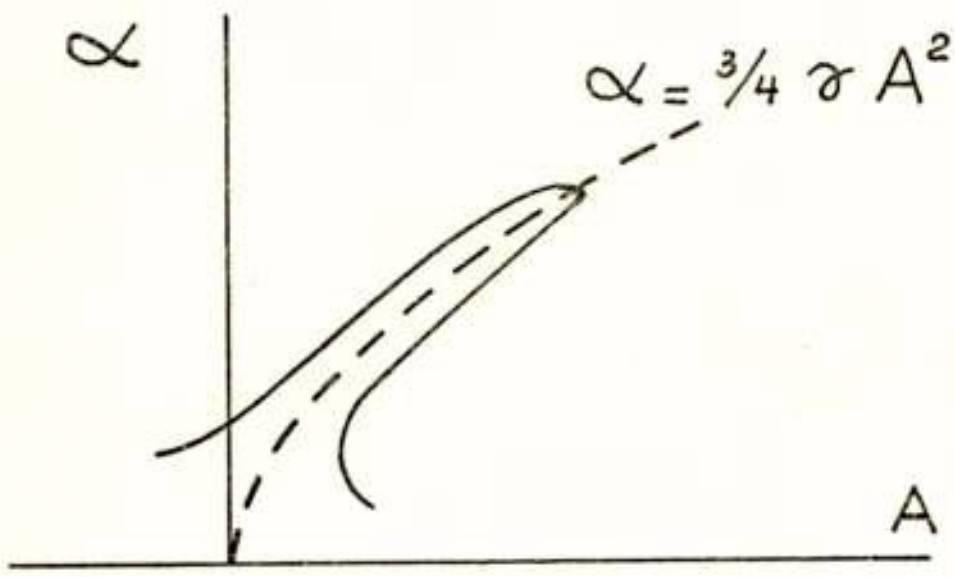


Fig. 4.

waarden zijn dan de beginwaarden van een 2e oplossing van de vergelijkingen (3a) en (4), die in het interval $2\pi \leqq t \leqq 4\pi$ als een voldoende benadering van vergelijking (2) zijn te beschouwen; daarmee bepalen we de beginwaarden van een in het interval $4\pi \leqq t \leqq 6\pi$ geldende oplossing, enz. Op deze manier krijgen we een resulterende oplossing, die voor alle waarden van t als een goede benadering van de oplossing van vergelijking (2) kan worden beschouwd. Bepalend voor deze resulterende oplossing zijn dus de waarden van A en φ op de tijdstippen $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = 4\pi$, enz. Hebben we deze gevonden, dan is de volledige oplossing gegeven.

We kunnen gemakkelijk afleiden, hoe groot de toename van A en φ in een interval 2π bedraagt, zelfs zonder dat we alle termen van x_1 uitrekenen. Alle periodieke termen hebben immers ten tijde $t = 0$ en $t = 2\pi$ dezelfde waarde. We behoeven dus uitsluitend te letten op de *niet-periodieke* componenten van x_1,

d.w.z. die componenten, die veroorzaakt worden door de termen met periode 2π in het 2e lid van vergelijking (4), dus door de termen in het 1e lid van vergelijking (5).

Zoals uit de lineaire trillingstheorie bekend is, hebben deze niet-periodieke componenten de volgende gedaante:

$$-\tfrac{1}{2}\varrho A t \cos(t+\varphi) + \tfrac{1}{2}(\alpha A - \tfrac{3}{4}\gamma A^3)\, t \sin(t+\varphi) + \frac{\beta}{2} t \sin t$$

Daar $\sin t = \sin(t+\varphi-\varphi) = \sin(t+\varphi)\cos\varphi - \cos(t+\varphi)\sin\varphi$ kan hier ook voor worden geschreven:

$$\begin{aligned} &-\tfrac{1}{2}(\varrho A + \beta \sin\varphi)\, t \cos(t+\varphi) + \\ &\tfrac{1}{2}(\alpha A - \tfrac{3}{4}\gamma A^3 + \beta\cos\varphi)\, t \sin(t+\varphi). \end{aligned} \tag{9}$$

De 1e term is in faze of tegenfaze met $A\cos(t+\varphi)$ en geeft dus aanleiding tot een verandering van A, de 2e is 90^0 in faze verschoven met $A\cos(t+\varphi)$ en geeft dus een verandering van φ. Dit doet de vraag rijzen, of we uitdrukking (9), opgeteld bij $A\cos(t+\varphi)$ wellicht kunnen schrijven als:

$$(A + t\,\Delta A)\cos(t+\varphi+t\,\Delta\varphi). \tag{10}$$

Dit kan inderdaad, omdat bij verwaarlozing van hogere machten van ΔA en $\Delta\varphi$ geldt: $(A+t\,\Delta A)\cos(t+\varphi+t\,\Delta\varphi) = A\cos(t+\varphi) + t\,\Delta A\cos(t+\varphi) - A\,t\,\Delta\varphi\sin(t+\varphi)$.

Door vergelijking van deze uitdrukking met de uitdrukking (9) wordt gevonden:

$$\Delta A = -\tfrac{1}{2}(\varrho A + \beta\sin\varphi) \tag{11a}$$

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{3}{4}\gamma A^2 + \frac{\beta}{A}\cos\varphi\right). \tag{11b}$$

Uit (10) en (11) leiden we af, dat de toename van A en φ in de periode 2π bedraagt:

$$2\pi\,\Delta A = -\pi(\varrho A + \beta\sin\varphi) \tag{12a}$$

$$\text{en } 2\pi\,\Delta\varphi = -\pi\left(\alpha - \frac{3}{4}\gamma A^2 + \frac{\beta}{A}\cos\varphi\right). \tag{12b}$$

Met behulp der vergelijkingen (12) kunnen we dus de waarden van A en φ ten tijde $t = 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi$ enz. bepalen. De aldus achtereenvolgens in het $A\varphi$ vlak gevonden punten bepalen een veelhoek, waarvan de punten zeer dicht bij elkaar liggen, daar elk der termen in het rechterlid een der kleine parameters

α, β, γ of ϱ bevat. (het gebied vlak bij $A = 0$ zonderen we even uit). Deze veelhoek valt dus practisch samen met de kromme, die bepaald wordt door de differentiaalvergelijking, die verkregen wordt, door de beide vergelijkingen (12) op elkaar te delen en daarin de grootheden ΔA en $\Delta \varphi$ te vervangen door $d A$ en $d \varphi$[1]).

De het verband tussen A en φ bepalende differentiaalvergelijking wordt dus:

$$\frac{d A}{d \varphi} = \frac{\varrho A + \beta \sin \varphi}{\alpha - \frac{3}{4} \gamma A^2 + \frac{\beta}{A} \cos \varphi}. \tag{13}$$

We merken op, dat voor die waarden van A en φ, waarbij blijkens de vergelijkingen (6) periodieke oplossingen behoren, teller en noemer in het rechterlid van (13) beide nul worden, zodat periodieke oplossingen corresponderen met singulariteiten van deze differentiaalvergelijking.

Het gebied $A \approx 0$ (dat we zo juist uitzonderden) levert geen moeilijkheden op; in dit gebied is de term met γx^3 in het rechterlid van vergelijking (2) te verwaarlozen en deze vergelijking wordt lineair.

§ 6.

De vergelijking (13) is elementair op te lossen in het geval, dat $\varrho = 0$ gesteld mag worden en dit geval zullen we dan ook eerst gaan beschouwen.

Verg. (13) wordt dan:

$$\frac{d A}{d \varphi} = \frac{A \beta \sin \varphi}{\alpha A - \frac{3}{4} \gamma A^3 + \beta \cos \varphi}. \tag{14}$$

Hieruit leiden we af:

$$(\alpha A - \tfrac{3}{4} \gamma A^3)\, d A = A \beta \sin \varphi \, d \varphi - \beta \cos \varphi \, d A$$

$$\alpha A \, d A - \tfrac{3}{4} \gamma A^3 \, d A = - \beta \{ A \, d(\cos \varphi) + (\cos \varphi) \, d A \} = - \beta \, d (A \cos \varphi)$$

[1]) Een soortgelijke gedachtegang blijkt gevolgd te zijn door Kryloff en Bogoliuboff bij de behandeling van het geval van een teruggekoppelde versterker, zie „l'Onde électrique" 1936 blz. 508 e.v.

Deze vergelijking is direct te integreren tot:

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha\,A^2 - \tfrac{3}{16}\,\gamma\,A^4 = -\,\beta\,A\cos\varphi + C \quad \text{of}$$

$$\tfrac{3}{16}\,\gamma\,A^4 - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,A^2 - \beta\,A\cos\varphi + C = 0\,. \tag{15}$$

In een rechthoekig coördinaten stelsel $a_0\,a_1$, waarbij $a_0 = A\cos\varphi$ en $a_1 = -\,A_1\sin\varphi$, wordt deze vergelijking:

$$\tfrac{3}{16}\,\gamma\,(a_0^2 + a_1^2)^2 - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,(a_0^2 + a_1^2) - \beta\,a_0 + C = 0\,. \tag{16}$$

Deze vergelijking bepaalt een stelsel gesloten krommen, die elkaar niet snijden (behoudens één uitzondering, waarop we nog terug zullen komen) en die de a_0-as tot symmetrie-as hebben. Bij gegeven waarden van α, β en γ zijn deze krommen nauwkeurig te berekenen, maar ook zonder veel rekenwerk is het mogelijk een duidelijk inzicht te krijgen in het verloop dezer krommen. Van groot belang zijn hierbij de ligging en de aard van de *singuliere* punten. Bij het onderzoek hiervan zullen we de oplossing in de vorm van vergelijking (16) gebruiken.

Schrijven we deze vergelijking symbolisch als $f(a_0\,a_1) = 0$, dan is bekend, dat die punten van de kromme $f(a_0\,a_1) = 0$ singulier zijn, waarvoor geldt

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 0 \text{ en } \frac{\partial f}{\partial a_1} = 0.$$

De aard van de singulariteit wordt bepaald door de uitdrukking

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_0\,\partial a_1}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}\,.$$

Voor $D > 0$ zijn er in het singuliere punt twee verschillende raaklijnen aan de integraalkromme: het punt is dus een *dubbelpunt* (zadelpunt); voor $D = 0$ vallen beide raaklijnen samen (*keerpunt*) en voor $D < 0$ worden de raaklijnen imaginair: het punt is een *geïsoleerd* punt[1]).

Uit (16) volgt:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = \tfrac{3}{4}\,\gamma\,a_0\,(a_0^2 + a_1^2) - \alpha\,a_0 - \beta \tag{17a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = a_1\left\{\tfrac{3}{4}\,\gamma\,(a_0^2 + a_1^2) - \alpha\right\} \tag{17b}$$

---

[1]) Fricke: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (1918) Band I blz. 316 e.v.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2} = \tfrac{9}{4}\gamma a_0^2 + \tfrac{3}{4}\gamma a_1^2 - \alpha \tag{17c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_0 \partial a_1} = \tfrac{3}{2}\gamma a_0 a_1 \tag{17d}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} = \tfrac{9}{4}\gamma a_1^2 + \tfrac{3}{4}\gamma a_0^2 - \alpha\,. \tag{17e}$$

Uit (17a) en (b) volgt, dat singulariteiten optreden voor die punten a_0 en a_1 waarvoor geldt:

$$a_1 = 0 \text{ en } \tfrac{3}{4}\gamma a_0^3 - \alpha a_0 - \beta = 0\,. \tag{18}$$

Deze punten zijn dezelfde, die door (6a) en (b) worden bepaald, indien daarin $\varrho = 0$ wordt gesteld; *zij komen dus overeen met periodieke oplossingen.* De kromme, die het verband tussen a_0 en β, neergelegd in vergelijking (18) aangeeft, heeft voor $\alpha > 0$ de in figuur 3 aangegeven gedaante. Voor niet te grote waarden van β heeft deze vergelijking drie wortels, die we met A_1, A_2 en A_3 zullen aangeven, waarbij moge gelden $|A_1| < |A_2| < |A_3|$.

Uit vergelijking (17c), (d) en (e) volgt dan:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_0^2}\right)_{A_1} = \tfrac{9}{4}\gamma A_1^2 - \alpha\,; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_0 \partial a_1}\right)_{A_1} = 0\,; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}\right)_{A_1} = \tfrac{3}{4}\gamma A_1^2 - \alpha\,.$$

Voor D_{A_1} vinden we dan:

$$D_{A_1} = -\left(\tfrac{9}{4}\gamma A_1^2 - \alpha\right)\left(\tfrac{3}{4}\gamma A_1^2 - \alpha\right).$$

Op soortgelijke wijze volgt voor A_2

$$D_{A_2} = -\left(\tfrac{9}{4}\gamma A_2^2 - \alpha\right)\left(\tfrac{3}{4}\gamma A_2^2 - \alpha\right)$$

en voor A_3: $\quad D_{A_3} = -\left(\tfrac{9}{4}\gamma A_3^2 - \alpha\right)\left(\tfrac{3}{4}\gamma A_3^2 - \alpha\right).$

De uitdrukking $\tfrac{3}{4}\gamma A^2 - \alpha$ wordt nul voor het punt A_0, waar de kromme van fig. 3 de as $\beta = 0$ snijdt, zoals onmiddellijk uit vergelijking (18) volgt. We zullen aantonen, dat de uitdrukking $\tfrac{9}{4}\gamma A^2 - \alpha$ nul wordt voor de waarde A_m, die met het maximum of minimum der kromme van fig. 3 correspondeert.

Uit (18) volgt immers $\dfrac{d\beta}{da_0} = \tfrac{9}{4}\gamma a_0^2 - \alpha\,.$

Voor A_m geldt dus: $\tfrac{9}{4}\gamma A_m^2 - \alpha = 0\,.$

Daar nu $|A_1| < |A_m|$ en $|A_1| < |A_0|$ (zie fig. 3) zijn beide factoren in de uitdrukking voor D_{A_1} negatief, derhalve is $D_{A_1} < 0$ en A_1 is dus een *geïsoleerd* punt.

Ook A_3 is een *geïsoleerd* punt, daar $|A_3| > |A_0|$ en $|A_3| > |A_m$ zodat beide factoren positief zijn en D_{A_3} is dus weer negatief. Anders is het met A_2. Hiervoor geldt immers:

$$|A_2| > |A_m| \text{ en } |A_2| < |A_0| .$$

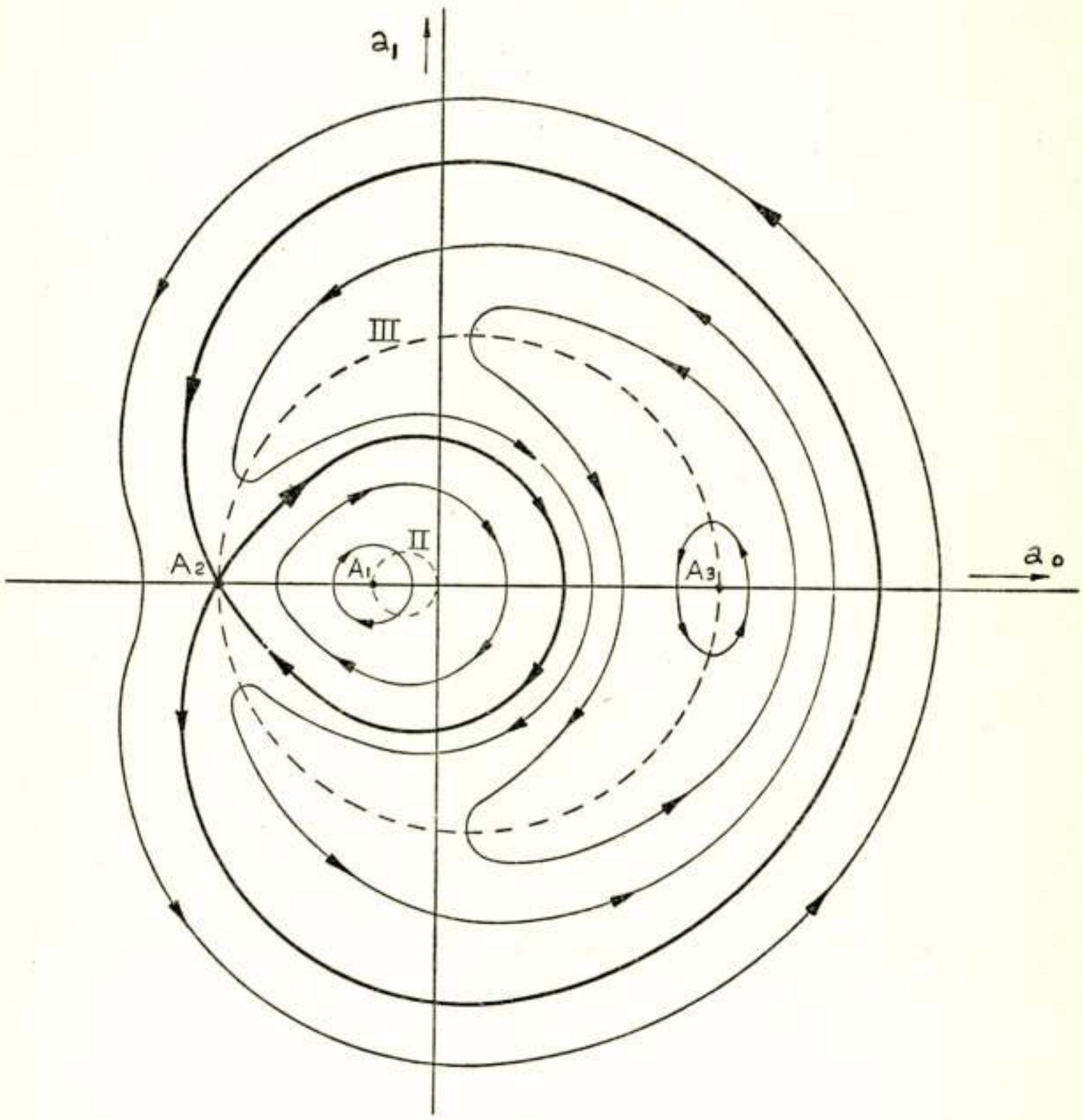


Fig. 5.

De ene factor van D_{A_2} is dus positief, de andere negatief en dus is $D_{A_2} > 0$. Het punt A_2 (d.w.z. ieder punt tussen A_m en A_0) is dus een dubbelpunt met twee raaklijnen, die, zoals zonder moeite is te berekenen, symmetrisch gelegen zijn. Deze raaklijnen vallen samen in de richting van de as $a_1 = 0$ voor het punt A_m (waarvoor immers $D = 0$ wordt). Zij vallen wederom samen voor het punt A_0 (waarvoor immers ook $D = 0$), maar dan in een richting loodrecht op de as $a_1 = 0$.

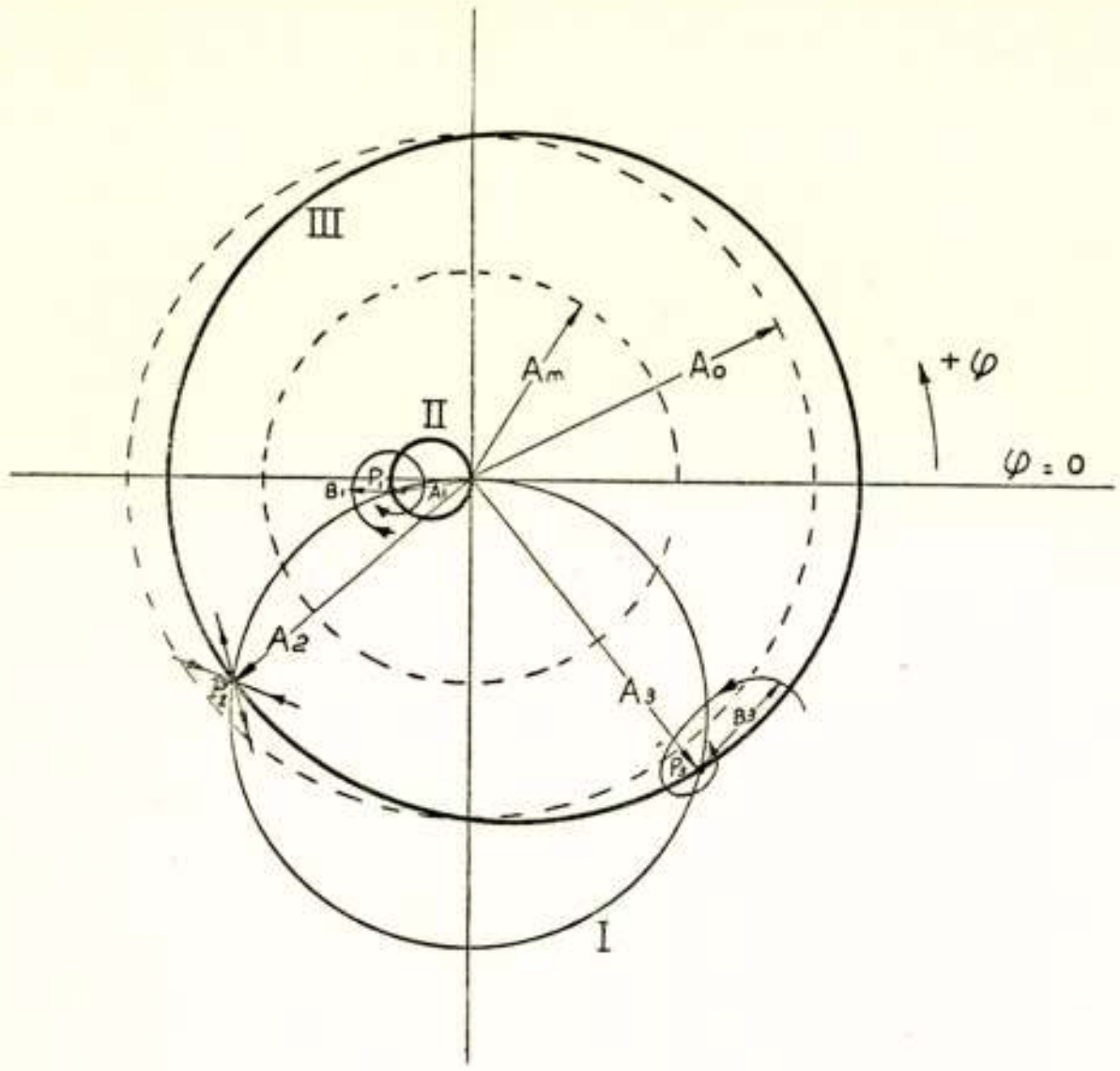


Fig. 6.

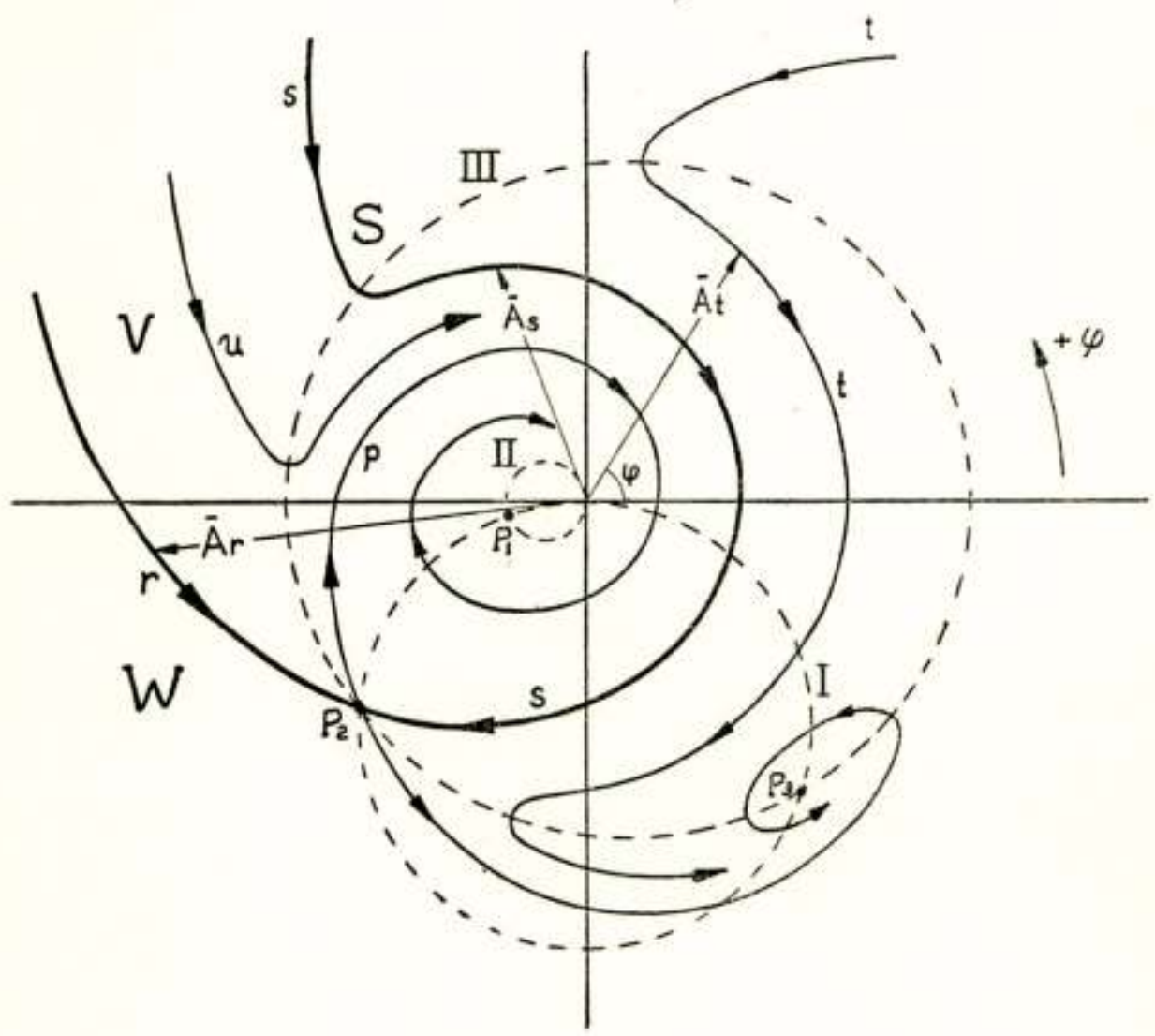


Fig. 7.

In fig. 5 hebben we de integraalkrommen volgens vergelijking (16) geschetst in het geval, dat de vergelijking (18) drie verschillende, reële wortels heeft. a_0 en a_1 zijn hierin dus de waarden van x en van $\dot{x}$ ten tijde $t = 0$, $t = 2\pi$, enz. dus op ogenblikken,

die telkens een tijd 2π na elkaar liggen. De gestippelde krommen II en III stellen die waarden van a_0 en a_1 voor, waarbij de noemer van vergelijking (14) nul wordt en waarin de integraalkrommen dus raken aan de verbindingslijn van het betreffende punt met de oorsprong van het coördinatenstelsel. Hierop zal bij fig. 6 en 7 nader worden ingegaan.

We kunnen in fig. 5 drie soorten krommen onderscheiden n.l.

a) krommen om het punt A_1;

b) krommen om het punt A_3;

c) krommen om beide punten.

Apart staat dan nog de kromme door A_2, die men als een zichzelf snijdende kromme kan beschouwen (of als een kromme om A_3, waarvan de omgebogen toppen elkaar juist raken) en die de verschillende soorten krommen scheidt. Een dergelijke kromme heet in de mathematische literatuur „separatrice".

Uit figuur 5 blijkt duidelijk, dat de periodieke oplossing, corresponderend met A_1 of A_3 een geheel ander karakter heeft dan die corresponderend met A_2. Een geringe afwijking van de met de periodieke oplossing corresponderende beginvoorwaarden betekent in het eerste geval immers, dat een kromme beschreven wordt, die dicht om A_1, resp. A_3 heen ligt. Men kan A_1 en A_3 dus *stabiele* oplossingen noemen.

Geheel anders staat het met de periodieke oplossing aangegeven door A_2. Een geringe afwijking van de met deze oplossing overeenkomende beginvoorwaarden veroorzaakt het doorlopen van krommen, die zich tot op grote afstand van het punt A_2 uitstrekken en in zoverre kan deze oplossing *labiel* worden genoemd. Niet vergeten mag dan echter worden, dat het punt a_0/a_1 bij het doorlopen van die kromme tenslotte toch weer telkens in de onmiddellijke nabijheid van het punt A_2 terugkomt en in zoverre zou men ook de periodieke oplossing, gekenmerkt door A_2, wel met enig recht *stabiel* kunnen noemen. Het hangt er dus slechts van af, hoe men het begrip labiliteit definieert.

Hoe de integraalkrommen er uit zullen zien in het geval $A_1 = A_2 = A_m$, waarbij de beide wortels A_1 en A_2 dus samenvallen, behoeft na het bovenstaande wel niet meer afzonderlijk te worden geschetst. Het singuliere punt $A_1 A_2$ is dan, zoals we boven zagen, een *keerpunt* geworden; alle integraalkrommen omsluiten het punt A_3. Heeft men een periodieke oplossing, die door A_m wordt gekarakteriseerd en maakt men β iets groter, dan gaat het punt a_0/a_1 dus een zeer grote integraalkromme om het punt A_3 beschrijven. Dit kan, zoals we verderop nog

zullen verduidelijken, als de som van een gedwongen trilling (gekenmerkt door A_3) en een „vrije" trilling worden beschouwd. Het is dus niet zo, dat de oplossing in dit geval plotseling van A_m naar A_3 springt, zoals men soms in de literatuur vindt aangegeven.

Het kipverschijnsel is dus in principe niet een springen van de ene periodieke oplossing in de andere, maar het veranderen van een periodieke trilling in de som van een andere periodieke trilling en een daarbij behorende „vrije" trilling van grote amplitude.

Nadrukkelijk wordt er op gewezen, dat de bovenstaande beschouwingen omtrent de stabiliteit slechts gelden voor het geval, dat de keten verliesvrij is. Het is te verwachten (zie ook § 7) dat, indien men de weerstand in aanmerking neemt, de krommen om A_1 en A_3 spiralen zullen worden, die in A_1, resp. A_3 uitlopen en dat een integraalkromme, die uitgaat van een punt in de buurt van A_2, eveneens tenslotte in A_1 of A_3 zal uitmonden, zodat de perodieke oplossing A_2 dan zonder enig voorbehoud *labiel* moet worden genoemd. Van de som van een andere gedwongen trilling en een „vrije" trilling, waarin bij het kippen een gedwongen trilling kan overgaan, wordt de „vrije" trilling door de weerstand gedempt en men krijgt *dan* inderdaad een overgaan van de ene gedwongen trilling in de andere.

Wanneer zullen de integraalkrommen daarbij in A_1 en wanneer in A_3 uitmonden? Deze vraag zulllen we in de volgende paragraaf trachten te beantwoorden. Maar eerst zullen we de krommen volgens fig. 5 vergelijken met de analoge krommen, die we in het lineaire geval krijgen. Vullen we in vergelijking (15) in $\gamma = 0$, dan vinden we:

$$\tfrac{1}{2}\, \alpha\, A^2 + \beta\, A \cos \varphi - C = 0\,.$$

Men kan aantonen, dat dit een stelsel cirkels voorstelt met als middelpunt het punt $A_{lin} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ gelegen op de lijn $a_1 = 0$. We weten uit de lineaire theorie, dat elk dezer cirkels te interpreteren is als de som van een gedwongen trilling met een amplitude $\dfrac{\beta}{\alpha}$ en een vrije trilling. Op soortgelijke wijze kunnen we de gesloten krommen om A_1 of om A_3 interpreteren als de som van een gedwongen trilling en een „vrije" trilling, daarbij echter bedenkende, dat deze „vrije" trilling niet meer als volkomen los van de gedwongen trilling mag worden gedacht,

zoals in het lineaire geval. In de volgende paragraaf zullen we nog op andere wijze laten zien, dat deze splitsing in gedwongen en „vrije" trilling ook in het niet-lineaire geval mogelijk en vruchtbaar is.

§ 7.

Wij zullen thans trachten een inzicht te krijgen inzake het verloop van de integraalkrommen, indien de weerstand niet te verwaarlozen is. De integraalkrommen worden dan bepaald door de vergelijking (13). Deze vergelijking is niet elementair op te lossen (althans deze oplossing is ons niet gelukt). Dit neemt echter niet weg, dat we de essentiële eigenschappen dier krommen toch wel kunnen vinden.

Van groot belang zijn uiteraard de beide krommen, waarvoor de teller resp. de noemer nul worden. De eerste dezer beide krommen wordt bepaald door de vergelijking $\varrho A + \beta \sin \varphi = 0$. Deze kromme is een cirkel, die door de oorsprong gaat en de middellijn $\frac{\beta}{\varrho}$ bezit; zij is in figuur 6 door I aangegeven. De tweede dezer krommen is die, waarvoor geldt:

$$\beta \cos \varphi - \tfrac{3}{4} \gamma A^3 + \alpha A = 0 . \tag{19}$$

Het verloop dezer kromme hangt af van de parameters. Kiest men $\alpha > 0$, (en alleen dat geval is eigenlijk interessant) dan valt voor voldoende kleine waarden van β deze kromme in twee gescheiden deelkrommen uiteen.

β moet dan zo klein zijn, dat ook voor $\sin \varphi = 0$ de vergelijking (19) nog drie verschillende reële wortels heeft. Deze beide deelkrommen zijn in fig. 6 met II en III aangeduid. De snijpunten dezer deelkrommen met de as $\varphi = 0$ en het verlengde daarvan zijn punten, die overeenstemmen met de punten A_1, A_2 en A_3 van fig. 3. Bij toenemende β vallen bij een bepaalde waarde β_m de beide wortels A_1 en A_2 samen tot A_m, waarvoor de in de voorgaande paragraaf afgeleide waarde geldt (zie ook fig. 3.) De beide deelkrommen II en III raken elkaar dan in het punt $A = A_m$; $\varphi = \pi$ (Voor nog grotere waarden van β vormen de deelkrommen één samenhangende kromme, die de lijn $\varphi = \pi$ niet snijdt). Belangrijk is ook nog, dat voor iedere waarde van β het snijpunt van deelkromme III met de lijn $\varphi = \frac{\pi}{2}$, resp. $\frac{3\pi}{2}$ bepaald wordt door de betrekking:

$$\tfrac{3}{4}\gamma A_0^2 - \alpha = 0 .$$

We stellen nu vast, dat *buiten* de cirkel I de uitdrukking $\varrho A + \beta \sin \varphi > 0$ is en er *binnen* is die uitdrukking < 0. Dit betekent, dat *buiten* de cirkel I blijkens vergelijking (11a) ΔA negatief is, dus dat daar met toenemende tijd de waarde van A afneemt; *binnen* cirkel I is het juist omgekeerd. Verder geldt: $\beta \cos \varphi - \frac{3}{4}\gamma A^3 + \alpha A < 0$ voor punten *buiten* de kromme III en *binnen* kromme II, terwijl voor het gebied *tussen* de krommen II en III geldt: $\beta \cos \varphi - \frac{3}{4}\gamma A^3 + \alpha A > 0$. Uit vergelijking (11b) volgt dan, dat in het gebied *tussen* de beide krommen II en III $\Delta \varphi$ negatief is, dus φ met toenemende tijd *afneemt* en overal elders *toeneemt. Op de krommen II en III verandert dus de draairichting van de vector* $\overline{A}$*; in de punten van kromme I raken de integraalkrommen aan cirkels met de oorsprong tot middelpunt.*

Wanneer we nu nog de aard van de singulariteiten, d.w.z. het verloop der integraalkrommen in de buurt der singuliere punten, opgespoord hebben, hebben we voldoende gegevens om ons een duidelijk beeld van de integraalkrommen te vormen.

De singulariteiten (periodieke oplossingen!) worden gevormd door de snijpunten van de kromme I met de deelkrommen II en III. Laat het punt P_i met de coördinaten A_i/φ_i een dezer drie snijpunten voorstellen en $A_i \cos (t + \varphi_i)$ dus een periodieke oplossing.

We splitsen nu $x_0 = A \cos (t + \varphi)$ in de twee componenten $A_i \cos (t + \varphi_i)$ en $B_i \cos (t + \psi_i)$, hetgeen uiteraard steeds mogelijk is en schrijven dus:

$$x_0 = A_i \cos (t + \varphi_i) + B_i \cos (t + \psi_i)$$

waaruit volgt: $\dot{x}_0 = - A_i \sin (t + \varphi_i) - B_i \sin (t + \psi_i)$.

We vullen deze uitdrukkingen in in het rechter lid van verlijking (3b), en schrappen de termen met hogere machten van B_i, daar we het verloop in de nabijheid van het punt P_i willen weten, zodat B_i klein mag worden ondersteld. De het verloop der integraalkrommen bepalende termen zijn dan:

$$\{\varrho A_i \sin (t + \varphi_i) + \alpha A_i \cos (t + \varphi_i) - \gamma A_i^3 \cos^3 (t + \varphi_i) + \beta \cos t\} +$$
$$+ \varrho B_i \sin (t + \psi_i) + \alpha B_i \cos (t + \psi_i) - 3\gamma A_i^2 B_i \cos^2 (t + \varphi_i) \cos (t + \psi_i)$$

De termen tussen de accolades met de periode 2π compen-

seren elkaar juist, omdat we A_i en φ_i juist zo gekozen hebben, dat deze termen wegvallen. Bepalend voor de baan van het punt A/φ zijn dus enkel de termen met periode 2π van de uitdrukking:

$$\varrho B_i \sin(t+\psi_i) + \alpha B_i \cos(t+\psi_i) - 3\gamma A_i^2 B_i \cos^2(t+\varphi_i)\cos(t+\psi_i)$$

De uitdrukking $\cos^2(t+\varphi_i)\cos(t+\psi_i)$ blijkt na enige herleiding de volgende termen met periode 2π te hebben:

$$\tfrac{1}{4}\cos(t+\psi_i)\{2+\cos(2\varphi_i-2\psi_i)\} - \tfrac{1}{4}\sin(t+\psi_i)\sin(2\varphi_i-2\psi_i)$$

De coëfficient van $\sin(t+\psi_i)$ wordt dus:

$$\varrho B_i + \tfrac{3}{4}\gamma A_i^2 B_i \sin(2\varphi_i - 2\psi_i)$$

en de coëfficient van $\cos(t+\psi_i)$ wordt:

$$\alpha B_i - \tfrac{3}{4}\gamma A_i^2 B_i\{2+\cos(2\varphi_i-2\psi_i)\}.$$

Een soortgelijke gedachtegang als in § 5 voert tot de vergelijkingen:

$$\Delta B_i = -\tfrac{1}{2}\{\varrho B_i + \tfrac{3}{4}\gamma A_i^2 B_i \sin(2\varphi_i - 2\psi_i)\}$$

$$\Delta \psi_i = -\tfrac{1}{2}[\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A_i^2\{2+\cos(2\varphi_i-2\psi_i)\}]$$

of iets anders geschreven:

$$\frac{\Delta B_i}{B_i} = -\tfrac{1}{2}\{\varrho + \tfrac{3}{4}\gamma A_i^2 \sin(2\varphi_i - 2\psi_i)\} \qquad (20a)$$

$$\Delta \psi_i = -\tfrac{1}{2}[\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A_i^2\{2+\cos(2\varphi_i-2\psi_i)\}]. \qquad (20b)$$

$\dfrac{2\pi\,\Delta B_i}{B_i}$ is de procentuële toename van B_i in de tijd 2π. Noemen we $\dfrac{2\pi\,\Delta B_i}{B_i} = \Delta R_i$. De differentiaalvergelijking, die we krijgen door de beide vergelijkingen (20) op elkaar te delen, is elementair te integreren. We zullen ons echter deze moeite besparen, daar de vergelijkingen (20) ons reeds alle gegevens verschaffen, die we wensen.

Beschouwen we hiertoe het punt P_1, d.w.z. het, het dichtst bij de oorsprong gelegen, singuliere punt, waarvoor dus geldt $|A_1| < |A_m|$, waarbij A_m voldoet aan de betrekking:

$$\tfrac{9}{4}\gamma A_m^2 - \alpha = 0 \quad \text{(zie fig. 3 en fig. 6)}.$$

Dan geldt:

$$\tfrac{3}{4}\gamma A_1^2\{2+\cos(2\varphi_1-2\psi_1)\}\leq\tfrac{9}{4}\gamma A_1^2<\tfrac{9}{4}\gamma A_m^2=\alpha$$

Dus:

$$\alpha-\tfrac{3}{4}\gamma A_1^2[2+\cos(2\varphi_1-2\psi_1)]>0\,.$$

Uit (20b) volgt nu: $\Delta\psi_1<0$ voor iedere waarde van B_1 en ψ_1 d.w.z. de vector $\overline{B}_1$ draait voortdurend in dezelfde (negatieve) richting rond om het punt P_1 met een snelheid, die niet van B_1 afhangt.

Voor het punt P_3 dat het verst van de oorsprong afligt, geldt $|A_3|>|A_0|$, waarbij A_0 voldoet aan de betrekking:

$$\tfrac{3}{4}\gamma A_0^2-\alpha=0\,.$$

Dan geldt:

$$\tfrac{3}{4}\gamma A_3^2\{2+\cos(2\varphi_3-2\psi_3)\}>\tfrac{3}{4}\gamma A_0^2\{2+\cos(2\varphi_3-2\psi_3)\}\geqq$$
$$\geqq\tfrac{3}{4}\gamma A_0^2=\alpha\,.$$

Dus:

$$\alpha-\tfrac{3}{4}\gamma A_3^2\{2+\cos(2\varphi_3-2\psi_3)\}<0$$

waaruit (zie verg. 20 b) volgt:

$$\Delta\psi_3>0\,.$$

De vector $\overline{B}_3$ draait dus voortdurend in dezelfde (positieve) richting om P_3 met een snelheid, die onafhankelijk is van B_3.

Gaan we thans na, hoeveel de grootte van B_1 veranderd is, indien de vector $\overline{B}_1$ één volledige omwenteling om P_1 heeft gemaakt. De hiervoor in aanmerking komende vergelijking, welke direct is af te leiden uit vergelijking (20a), is

$$\Delta R_1=-\pi\left\{\varrho+\tfrac{3}{4}\gamma A_1^2\sin(2\varphi_1-2\psi_1)\right\}.$$

De bijdrage van de term $\frac{3}{4}\gamma A_1^2\sin(2\varphi_1-2\psi_1)$ tot de toename van R_1 over een gehele omwenteling van de vector $\overline{B}_1$ is nul, daar tegenover een bepaalde toename van R_1 bij een waarde $2\varphi_1-2\psi_1=k$ een precies gelijke afname staat voor de waarde $2\varphi_1-2\psi_1=k+\pi$.

De totale verandering van R_1 bij een volledige omwenteling van de vector $\overline{B}_1$ is dus negatief en hangt enkel van ϱ af. De vector $\overline{B}_1$ beschrijft dus een spiraal om P_1, die ten slotte in P_1 uitmondt. Hetzelfde geldt voor $\overline{B}_3$, zoals op dezelfde wijze is aan te tonen; de draairichting van de door $\overline{B}_3$ beschreven

spiraal is echter juist omgekeerd als die van de door $\bar{B}_1$ beschreven spiraal.

Geheel anders liggen de zaken bij het punt P_2, dus die singulariteit, waarvoor geldt $|A_m| < |A_2| < |A_0|$.

We zullen aantonen, dat er nu bepaalde reële waarden van ψ_2 aan te wijzen zijn, waarvoor $\Delta \psi_2 = 0$ wordt. Hieraan wordt blijkens vergelijking (20b) immers voldaan, indien:

$$\cos(2\varphi_2 - 2\psi_2) = \frac{\alpha}{\frac{3}{4}\gamma A_2^2} - 2 . \tag{21}$$

Daar $|A_2| < |A_0|$ geldt: $\alpha - \frac{3}{4}\gamma A_2^2 > 0$, of $\dfrac{\alpha}{\frac{3}{4}\gamma A_2^2} > 1$

en daar $|A_2| > |A_m|$ geldt: $\alpha - \frac{9}{4}\gamma A_2^2 < 0$, of $\dfrac{\alpha}{\frac{3}{4}\gamma A_2^2} < 3$.

De waarde van $\dfrac{\alpha}{\frac{3}{4}\gamma A_2^2} - 2$ ligt dus tussen $+1$ en -1, zodat aan vergelijking (21) door reële waarden van $2\varphi_2 - 2\psi_2$ wordt voldaan. Is $2\varphi_2 - 2\psi_2 = \delta$ een dezer waarden, dan voldoet ook $2\varphi_2 - 2\psi_2 = -\delta$.

We vinden dus: $\psi_2 = \varphi_2 - \delta/2$ en $\psi_2 = \varphi_2 + \delta/2$, dus waarden, die symmetrisch liggen ten opzichte van φ_2.

Ook voldoen uiteraard nog twee waarden, die 180^0 met deze beide waarden van φ_2 verschillen.

Hoe zal nu het punt B_2 zich met toenemende tijd langs de benen van de zo juist bepaalde hoeken bewegen? Daar $\sin\delta$ tegengesteld is aan $\sin(-\delta)$, zullen voor één dezer hoeken de beide termen tussen accolades van vergelijking (20a) beide positief zijn, d.w.z. voor deze waarde van φ_2 neemt $\dfrac{2\pi \Delta B_2}{B_2}$ (zie vergelijking 20a) telkens met een constante waarde af, wanneer t met 2π is toegenomen, dus het punt B_2 nadert logarithmisch tot het punt P_2, dat derhalve eerst bij $t = \infty$ wordt bereikt. Hetzelfde geldt, indien het punt B_2 zich beweegt langs een lijn, die een hoek van 180^0 maakt met de zo juist beschouwde richting.

Anders is het echter bij die waarde van ψ_2, waarvoor $\sin(2\varphi_2 - 2\psi_2) < 0$ is. We kunnen namelijk aantonen, dat $|\varrho| < |\frac{3}{4}\gamma A_2^2 \sin\delta|$.

Uit $\cos\delta = \dfrac{\alpha}{\frac{3}{4}\gamma A_2^2} - 2$ (vergelijking 21) leidt men immers zonder moeite af:

$$(\tfrac{3}{4}\gamma A_2^2 \sin\delta)^2 = (\tfrac{9}{4}\gamma A_2^2 - \alpha)(\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A_2^2)\,. \tag{22}$$

Anderzijds is aan te tonen, dat

$$\varrho^2 < (\tfrac{9}{4}\gamma A_2^2 - \alpha)(\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A_2^2)\,. \tag{23}$$

Wanneer we immers in vergelijking (7a) stellen $\beta^2 = u$ en $A^2 = v$, en dan $\dfrac{du}{dv}$ bepalen, dan wordt gevonden:

$$\frac{du}{dv} = \varrho^2 + (\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma v)(\alpha - \tfrac{9}{4}\gamma v) = \varrho^2 + (\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A^2)(\alpha - \tfrac{9}{4}\gamma A^2)$$

Daar blijkens fig. 2 in het gebied van de tweede wortel (A_2) de helling van de kromme, die het verband tussen u en v aangeeft negatief is, geldt daar:

$$\frac{du}{dv} = \varrho^2 + (\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A_2^2)(\alpha - \tfrac{9}{4}\gamma A_2^2) < 0$$

of:

$$\varrho^2 < (\tfrac{9}{4}\gamma A_2^2 - \alpha)(\alpha - \tfrac{3}{4}\gamma A_2^2)\ ,$$

waarmee dus de betrekking (23) bewezen is.

Uit vergelijking (20a) volgt dus nu, dat voor die waarde van δ, waarvoor $\sin\delta < 0$, het punt B_2 zich van het punt P_2 verwijdert; hetzelfde geldt voor de hoek, die hiervan 180° afwijkt. We krijgen dus een configuratie als in fig. 6 bij P_2 is aangegeven.

We kunnen nu het onderzoek van de baan van de vector $\overline{B}_i$ in de buurt van de punten P_1, P_2 en P_3 als volgt samenvatten:

De vector $\overline{B}_1$ draait voortdurend in negatieve richting om het punt P_1 en neemt daarbij (gemiddeld genomen over elke omwenteling) voortdurend in grootte af. De hierdoor voorgestelde trilling kan als een gedempte „vrije" trilling worden opgevat met een eigen frequentie, die **kleiner** *is dan de frequentie der opgedrukte trilling. De vector $\overline{B}_3$ stelt een gedempte „vrije" trilling voor met een eigen frequentie, die* **groter** *is dan de frequentie der gedwongen trilling.*

Op die rechten door P_2, waarlangs het uiteinde van de vector $\overline{B}_2$

zich onder constant blijven van ψ_2 naar het punt P_2 toe beweegt of daarvan af, kan men spreken van een „vrije" trilling, waarvan de eigen frequentie precies gelijk is aan de frequentie der gedwongen trilling.

In fig. 7 hebben we het verloop der integraalkrommen globaal aangegeven. De krommen I, II en III hebben dezelfde betekenis als in fig. 6. Zeer belangrijk zijn de krommen door P_2. Kromme r, die in P_2 uitmondt, ligt geheel buiten de krommen I en III; de vector $\bar{A}_r$ draait dus op de bovengenoemde gronden steeds in positieve richting, terwijl de grootte steeds afneemt. De kromme s, die vanaf de andere zijde in P_2 uitmondt, vertoont een gecompliceerder verloop. Buiten kromme III is het verloop als dat van kromme r; zodra zij echter kromme III in het punt S snijdt, verandert de vector $\bar{A}_s$ van draairichting; de grootte van de vector $\bar{A}_s$ blijft afnemen, totdat cirkel I wordt gesneden; de grootte van de vector neemt dan toe, terwijl de draairichting hetzelfde blijft en zo wordt P_2 bereikt.

De integraalkrommen s en r verdelen het A/φ vlak in twee gedeelten V en W. Daar twee integraalkrommen elkaar (behoudens in singuliere punten) niet kunnen snijden, zal een integraalkromme, die in een punt van het gedeelte V begint, ook geheel in dit gedeelte moeten liggen; evenzo zal een integraalkromme, die in het gedeelte W begint, geheel in W moeten liggen. De krommen r en s zijn dus separatrices.

De kromme p, die in P_2 ontspringt, buigt naar rechts (omdat zij tussen II en III inligt) en zal ten slotte spiraalvormig in P_1 uitmonden. De kromme, die P_2 in tegenovergestelde richting verlaat, ligt buiten III en buigt dus in tegengestelde richting; zij loopt spiraalvormig in P_3 uit. Het verloop van krommen u en t behoeft hierna wel geen nadere toelichting; u loopt, evenals alle krommen in V, naar P_1 en t loopt, evenals alle krommen in W, naar P_3.

Wil men in een concreet geval bepalen, bij welke aanvangsvoorwaarden de ene stabiele periodieke oplossing en bij welke de andere wordt verkregen, dan dient men dus de separatrices door het de labiele periodieke oplossing karakteriserende punt P_2 te construeren. Dit kan geschieden met behulp van de een of andere approximatieve integratiemethode of met een mechanische integrator.

Het zal verder uit fig. 7 duidelijk zijn, dat de stabiliteit van de door P_1 en P_3 voorgestelde oplossingen des te groter is, naarmate deze punten verder van de separatrices verwijderd zijn.

§ 8.

Tot slot nog drie opmerkingen:

1) Onder aanvangsvoorwaarden zijn tot nu toe verstaan de waarden van A en φ, ten tijde $t = 0$, dus op dat tijdstip, waarop $\beta \cos t$ maximaal is. Schakelt men de keten op een moment in, waarop deze term *niet* zijn maximum waarde bezit, en wil men weten, welke periodieke toestand daarmee correspondeert, dan kan dit geschieden door eerst de waarden van A en φ te bepalen, die optreden ten tijde van het eerstvolgende maximum van $\beta \cos t$.

Principiële moeilijkheden en nieuwe gezichtspunten levert dit niet op.

2) We hebben de variabele t bij het verkrijgen van een oplossing der differentiaalvergelijking verdeeld in intervallen met de lengte 2π; we hadden zonder veel moeite de verdeling nog iets fijner kunnen kiezen, n.l. intervallen van de lengte π.

3) De krommen volgens fig. 5, 6 en 7 doen denken aan de krommen, die men krijgt door van een in een trillingsketen optredende *vrije* trilling (dus *zonder* opgedrukte wisselspanning) *alle* ogenblikswaarden dier trilling, alsmede *alle* ogenblikswaarden der eerste afgeleide, in een rechthoekig coördinatenstelsel uit te zetten, zodat men het z.g. „fazeportret" dier trilling krijgt[1]).

Onze figuren 5, 6 en 7 stellen echter niet alle ogenblikswaarden van de trilling en de eerste afgeleide daarvan voor, doch telkens over 2π verschoven ogenblikswaarden van die beide grootheden.

De figuren 5, 6 en 7 geven dus als het ware een *„stroboscopisch genomen fazeportret"* van de, de gedwongen trilling vergezellende, *„vrije"* trilling, waarvan de frequentie slechts weinig van die der gedwongen trilling afwijkt.

---

[1]) Zie b.v. Andronow & Chaikin: „Theory of oscillations", (Princeton 1949) blz. 6 e.v.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Over de versterking van impulsvormig gemoduleerde spanningen en de daarbij optredende hellingsvermindering en tijdsvertraging

door J. W. Alexander

SUMMARY

The envelope of the output pulse of an amplifier depends on the construction of the amplifier. The important points of the envelope are the slope (so the first derivate of the envelope) and the time delay (the second derivate). It is shown that the calculation of the derivate is very much simpler than the calculation of the envelope itself. This theory is applied to an amplifier with a number of single tuned circuits as well as to an amplifier with a number of coupled or staggered circuits.

Inleiding.

Het versterken van spanningen met amplitude of frequentiemodulatie stelt aan een versterker bepaalde eisen wat betreft de bandbreedte. Het gemoduleerde signaal bestaat immers uit een spanning met de draaggolffrequentie en daaromheen gegroepeerd in frequenties de modulatie. Wil het versterkte signaal een goede afbeelding zijn van het oorspronkelijke, dan moeten de zijbandfrequenties van de modulatie practisch evenveel versterkt worden. Bij een uit kringen opgebouwde versterker, die dus uit de aard der zaak frequentie-afhankelijk is, worden door die zijbanden dus eisen gesteld aan de frequentiebreedte van de versterker.

Een impulsvormig hoogfrequent signaal kan beschouwd worden als een hoogfrequentsignaal, dat slechts gedurende betrekkelijk korte tijden aanwezig is. Een dergelijk signaal is echter ook op te vatten als een gemoduleerd signaal, dus een draaggolf met zijbanden. Het verschil tussen een impulsvormige modulatie en een amplitudemodulatie (met een beperkt aantal modulatie-

frequenties) is, dat bij impulsvormige modulatie het aantal modulatiefrequenties veel groter is, zelfs theoretisch oneindig. Daar dit practisch onmogelijk is te verwezenlijken, moet een impulsversterker altijd een vervormd signaal weergeven. Het is dus duidelijk, dat het signaal door de versterker vervormd zal worden, maar alvorens op die vervorming verder in te gaan moeten we ons eerst afvragen, welke informatie we van het signaal verwachten en hoe de invloed van de vervorming hierop is.

Het signaal wordt n.l. gebruikt om een informatie over te brengen, en wat ons eigenlijk intereseert is, wat er van de oorspronkelijke rechthoekige impulsvorm overblijft, als het hoog- of middelfrequente signaal de versterker doorlopen heeft. Van de oorspronkelijke modulatie worden de hoogste frequenties niet versterkt wegens de eindige bandbreedte van de versterker en hierdoor zal de oorspronkelijke steile helling overgaan in een minder steile, dus wordt meer een trapezium vorm verkregen. Wat ons hiervan interesseert is de *helling* en de *vertragingstijd*. Onder deze tijd willen we verstaan het verschil in tijd tussen de oorspronkelijke impuls voor de versterking en de vervormde impuls na de versterking.

Mathematisch interesseert ons dus $\frac{dE}{dt}$ en het tijdstip waarop $\frac{dE}{dt}$ maximaal wordt, wanneer $E(t)$ de omhullende van het versterkte signaal weergeeft. $E(t)$ zelf is eigenlijk niet interessant. Bovendien zal uit het volgende blijken dat $\frac{dE}{dt}$ veel gemakkelijker te berekenen is dan $E(t)$.

Alvorens dit verder te onderzoeken zal eerst volledigheidshalve worden nagegaan hoe een gepulst signaal werkt op een bepaalde impedantie.

1. *Het verband tussen een gepulst signaal, de omhullende en de impedantie waarop het signaal werkt.*

Zoals bekend, kan een zich steeds herhalende impuls waarvan er 2 in fig. 1 weergegeven zijn, met een impulsduur τ en een herhalingstijd $\frac{2\pi}{\omega}$ geschreven worden als:

$$\frac{I_o \omega \tau}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega\tau}{2}}{\frac{k\omega\tau}{2}} \cos k\,\omega\, t\right) \tag{1}$$

Treedt gedurende de tijd τ een sinusvormige stroom met de (cirkel) frequentie ω_o op, dan kan dit geschreven worden als het product van $\sin \omega_o t$ en 1), dus:

$$I(t) = I_o \sin \omega_o t \frac{\omega\tau}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\omega\tau}{2}}{\frac{k\omega\tau}{2}} \cos k\,\omega t\right) \tag{2}$$

Hieruit zien we, dat het pulsen tot resultaat heeft, dat de draaggolf met frequentie ω_o een aantal zijband-frequenties met

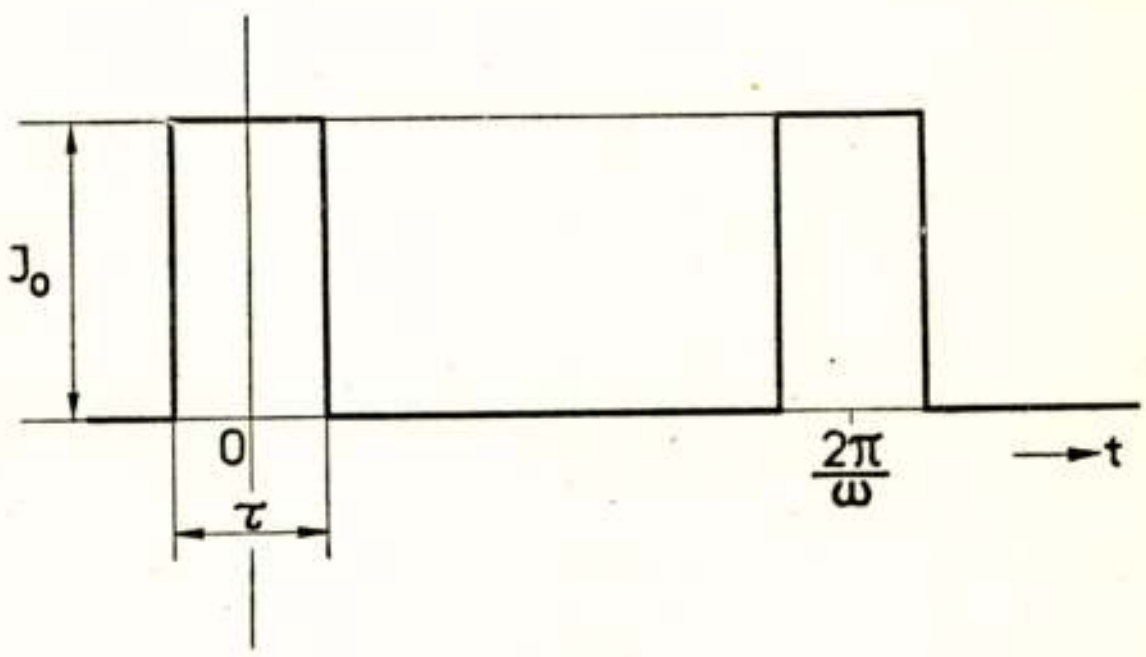


Fig. 1.

afnemende amplitude heeft op onderlinge afstand ω dus:

$$I(t) = I_o \sin \omega_o t \frac{\omega\tau}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} m \cos k\,\omega\, t\right)$$

Teneinde na te gaan wat er gebeurt als een dergelijke stroom door een impedantie gestuurd wordt, beschouwen we eerst een enkel paar zijband-frequenties bijv. met $k = 1$, dan is in dit geval

$$I(t) = I_m \sin \omega_o t\,(1 + m \cos \omega\, t) \tag{3}$$

In complexe schrijfwijze:

$$I = I_m e^{j\omega_o t} + I_m \frac{m}{2} e^{j(\omega_o + \omega)t} + I_m \frac{m}{2} e^{j(\omega_o - \omega)t}$$

Deze stroom loopt door een impedantie Z die in het algemeen een functie van de frequentie Ω is, dus $Z(\Omega)$, maar waarin de frequentie ω_0 een zekere rol speelt zodanig dat:

$$Z(\Omega) = R.|f(\Omega - \omega_0).e^{j\varphi(\Omega - \omega_0)} = R.|f(\omega)|.e^{j\varphi(\omega)} = Rf(\omega) \quad (4)$$

waarin:

$$f(0) = 1 \quad \text{en} \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega - \omega_0 = \omega \quad (5)$$

In dit geval wordt de spanning aan de impedantie:

$$V = IZ = I_m e^{j\omega_0 t} R \left[1 + \frac{m}{2} |f(\omega)| e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{2} |f(-\omega)| e^{j(-\omega t + \varphi(-\omega))} \right]$$

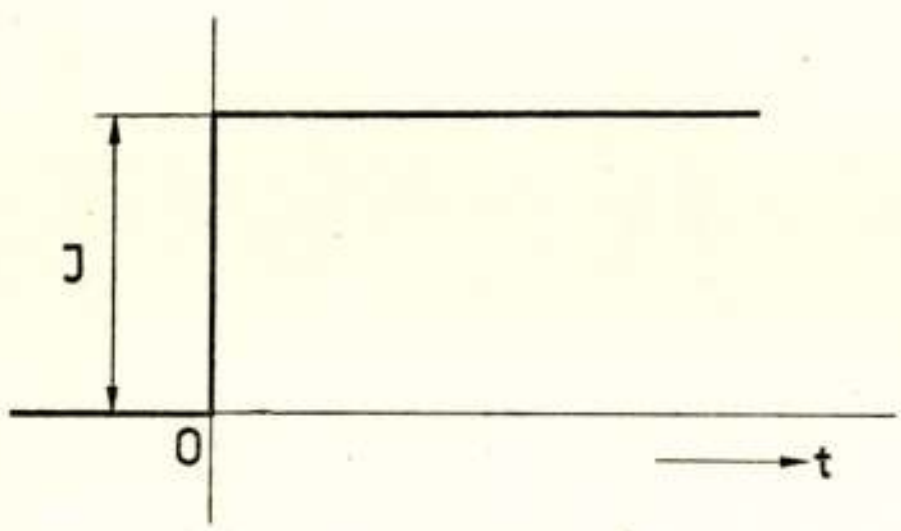


Fig. 2.

Voor het geval dat $|f(\omega)| = |f-(\omega)|$ en $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ (6) gaat dit over in:

$$I_m e^{j\omega_0 t} R \left[1 + m|f(\omega)| \cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right) \right]$$

De modulatie $m \cos \omega t$ verschijnt dus na het doorlopen van de impedantie $Rf(\omega)$ als

$$m|f(\omega)| \cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$$

Daar de sommatie van alle zijbanden de totale modulatie, d.i. de omhullende van de hoogfrequentspanning vormt, wordt dus de omhullende na het doorlopen van de impedantie $Z(\Omega)$ verkregen door de omhullende van de stroom te vermenigvuldigen met $f(\omega)$. (Hierbij treedt de factor R niet op, die als evenredigheidsfactor wel voor de grootte, maar niet voor de ons hier interesserende vorm belangrijk is).

Keren we nu terug naar het in de inleiding gestelde probleem, dan is nu de vraag te beantwoorden, hoe de helling van de impuls verandert bij het doorlopen van een impedantie. M.a.w. hoe verloopt de spanning op een impedantie indien daarop een stroomstoot gezet wordt volgens fig. 2.

2. *Het schakelen van een stroomstoot op een versterker met n kringen in cascade.*

Voor de impedantie van een kring met L, C en de resonantie weerstand R kan geschreven worden:

$$Z(\Omega) = \frac{j\,\Omega\,R\,L}{R + j\,\Omega\,L - \Omega^2\,R\,L\,C}$$

Met $\Omega = \omega_0 + \omega$, $\omega_0^2\,L\,C = 1$ en $R = \omega_0\,L\,Q$ gaat dit over in:

$$Z(\omega_0 + \omega) = \frac{R}{1 + 2\,j\,Q\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\,\dfrac{1 + \dfrac{\omega}{2\,\omega_0}}{1 + \dfrac{\omega}{\omega_0}}}$$

Zoals hiervoor al werd beschreven, bestaat de gepulste draaggolf in frequenties uitgedrukt, uit de draaggolffrequentie met zijbandfrequenties, waarvan de amplitude afneemt met toenemende afstand van de draaggolf. Hieruit blijkt dat eigenlijk alleen de frequenties in de buurt van de draaggolffrequentie maatgevend zijn. Er wordt dus een geringe fout gemaakt door voor de impedantie van de kring te schrijven:

$$Z(\omega_0 + \omega) = \frac{R}{1 + 2\,j\,Q\,\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{R}{1 + j\,\dfrac{\omega}{a}} \tag{7}$$

In dit geval is $f(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\,\dfrac{\omega}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{a^2}}}\,e^{-j\,bg\,tg\,\frac{\omega}{a}}$

Er is dus voldaan aan de voorwaarden 5) en 6). Inplaats van dus nu het resultaat verder te berekenen met behulp van de afzonderlijke zijbandfrequenties, en daaruit de omhullende te bepalen, kan volgens het voorgaande de omhullende van de spanning direct bepaald worden door de omhullende van de

stroom, of wel een eenheidsstroomstoot volgens fig. 2 te laten werken op de impedantie. Het resultaat kan dan eenvoudig berekend worden met behulp van de operatorenrekening. Volgens deze rekenwijze ontstaat dan een spanning, evenredig met:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p\left(1 + \frac{p}{a}\right)} dp \tag{8}$$

Voor een versterker met n kringen in cascade wordt dit:

$$E_n(t) = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{pt}}{p\left(1 + \frac{p}{a}\right)^n} dp$$

Deze integraal is op te lossen, maar geeft aanleiding tot een onoverzichtelijke reeks, daar er een pool ligt bij $p = 0$ en een pool van de n° orde bij $p = -a$. De oplossing is immers

$$E_n(t) = \frac{a^n}{2\pi j} \int \frac{e^{pt}}{p(a+p)^n} dp$$

$$= a^n \left[\frac{1}{a^n} + \left\{ \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \frac{e^{pt}}{p} \right\}_{p=-a} \right]$$

Dit is niet in een eenvoudige vorm te schrijven, daar differentiatie naar p in teller en in noemer een reeks oplevert.

Het probleem wordt veel eenvoudiger als we niet vragen naar $E_n(t)$, maar, zoals in de inleiding reeds werd opgemerkt, naar $\frac{dE_n}{dt}$:

$$\frac{dE_n}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int \frac{e^{pt}}{\left(1 + \frac{p}{a}\right)^n} dp$$

$$= \frac{a^n}{2\pi j} \int \frac{e^{pt}}{(a+p)^n} dp$$

Daar de integrand alleen een pool van de n^e orde heeft in $-a$, kan voor de integraal direct geschreven worden

$$2\pi j \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} e^{pt}\right)_{p=-a}$$

dus:
$$\frac{dE_n}{dt} = a^n \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \tag{10}$$

Het maximum hiervan treedt op bij:

$$\frac{d^2 E_n}{dt^2} = 0, \text{ waaruit volgt:}$$

$$t_m = \frac{n-1}{a}, \text{ zodat:} \tag{11}$$

$$\left(\frac{dE_n}{dt}\right)_m = \frac{a}{(n-1)!}(n-1)^{n-1} e^{-(n-1)} \tag{12}$$

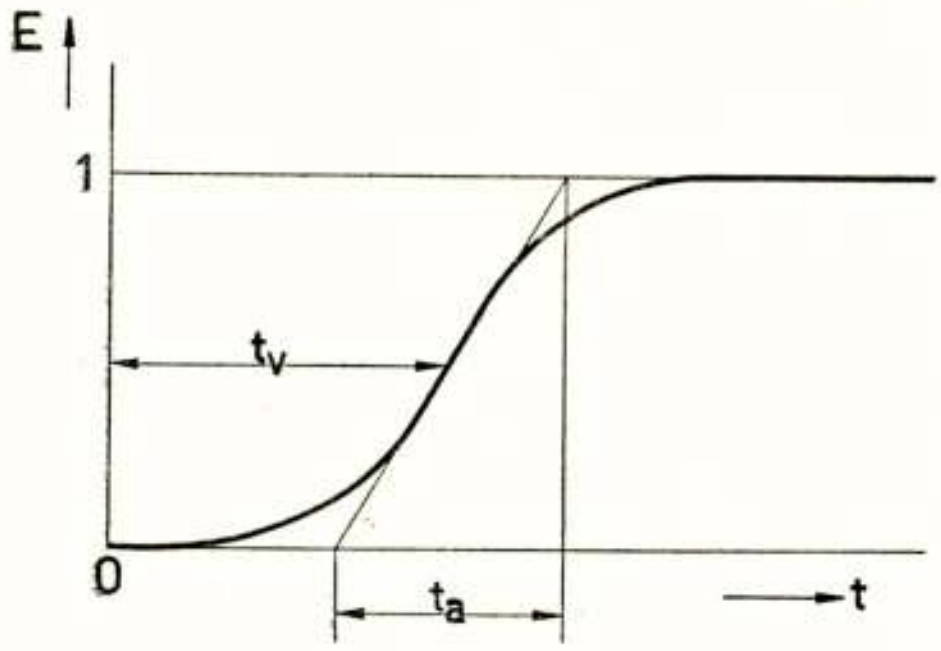


Fig. 3.

Voor grote waarde van n is volgens Stirling:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \text{ of}$$

$$(n-1)! = \sqrt{2\pi(n-1)}\,(n-1)^{n-1} e^{-(n-1)}, \text{ zodat:}$$

$$\left(\frac{dE_n}{dt}\right)_m = \frac{a}{\sqrt{2\pi(n-1)}} \tag{13}$$

Volgens fig. 3 is de *vertragingstijd* t_v, de tijd die verloopt vanaf het inschakelen van de impuls tot het moment, dat deze zijn maximale helling vertoont, dus volgens (11)

$$\boxed{t_v = \frac{n-1}{a} \approx \frac{n}{a}} \tag{14}$$

$\left(\frac{dE}{dt}\right)_m$ hangt samen met de *aanlooptijd* t_a, want volgens fig. 3 is

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_m = \frac{E}{t_a} = \frac{1}{t_a}, \text{ dus}$$

$$\boxed{t_a = \frac{1}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_m} = \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}}{a} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{a}} \tag{15}$$

De verschuivingstijd is dus evenredig met het aantal kringen n, terwijl de aanlooptijd evenredig is met de vierkantswortel uit het aantal kringen.

In beide formules treedt de factor a op. Volgens (7) is $a = \frac{\omega_0}{2Q} = \pi B_1$. Hierin is B_1 de bandbreedte van één kring, waarbij de impedantie Z op $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gevallen is.

Voor n kringen wordt de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ – breedte B_n gegeven door:

$$\left\{1 + \left(\frac{\pi B_n}{a}\right)^2\right\}^{n/2} = \sqrt{2}$$

$$\because \quad B_n = B_1\sqrt{2^{1/n} - 1} \tag{16}$$

Bij benadering is $\sqrt{2^{1/n} - 1} = \frac{1}{1{,}2}\frac{1}{\sqrt{n}}$, dus

$$B_n = \frac{B_1}{1{,}2\sqrt{n}} = \frac{a}{1{,}2\pi\sqrt{n}} \tag{17}$$

Hiermede wordt:

$$\underline{B_n t_v} = \frac{a}{1{,}2\pi\sqrt{n}}\frac{n-1}{a} = \frac{n-1}{1{,}2\pi\sqrt{n}} \approx \underline{0{,}265\sqrt{n}} \tag{18}$$

$$\underline{B_n t_a} = \frac{a}{1{,}2\pi\sqrt{n}}\frac{\sqrt{2\pi(n-1)}}{a} = \frac{\sqrt{2\pi\frac{n-1}{n}}}{1{,}2\pi} = 0{,}66\sqrt{\frac{n-1}{n}} \approx \underline{0{,}66} \tag{19}$$

In deze eenvoudige formules zijn dus 3 benaderingen toegepast n.l. de formule van Stirling, de benadering van $\sqrt{2^{1/n} - 1}$ en ten slotte $n - 1 \approx n$. Teneinde de hierdoor ontstane onnauwkeurigheden te kunnen overzien zijn in tabel I verschillende waarden berekend en in fig. 4 weergegeven, als functie van het aantal kringen. Deze gegevens zijn berekend uit de algemene formules voor n (laatste kolom). Hieruit blijkt dat de bovenste helft van tabel I de exacte waarden weergeeft en de onderste 4 regels de benaderde waarden, in fig. 4 aangeduid met (ben). Zoals te verwachten was, zijn de benaderingen voor kleine waarden van n betrekkelijk groot.

Tabel I.

	1 kring	2 kringen	3 kringen	4 kringen	n kringen
$\frac{dE}{dt}$	$a e^{-at}$	$a^2 t e^{-at}$	$\frac{a^3 3 t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{a^4 t^3 e^{-at}}{6}$	$\frac{a^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$
t_v	0	$\frac{1}{a}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{3}{a}$	$\frac{n-1}{a}$
$\left(\frac{dE}{dt}\right)_m$	a	$\frac{a}{e} = 0{,}37\,a$	$\frac{2a}{e^2} = 0{,}273\,a$	$\frac{9a}{2e^3} = 0{,}224\,a$	$a\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!\,e^{n-1}}$
t_a	$\frac{1}{a}$	$\frac{e}{a}$	$\frac{e^2}{2a}$	$\frac{2e^3}{9a}$	$\frac{(n-1)!\,e^{n-1}}{a(n-1)^{n-1}}$
B_n	$\frac{a}{\pi} = 0{,}318\,a$	$0{,}204\,a$	$0{,}162\,a$	$0{,}139\,a$	$\frac{a}{\pi}\sqrt{2^{1/n} - 1}$
$t_a B_n$	0,318	0,552	0,60	0,62	
$t_v B_n$	—	0,205	0,324	0,417	
$\left(\frac{dE}{dt}\right)_m$	—	$0{,}4\,a$	$0{,}283\,a$	$0{,}23\,a$	$\frac{a}{\sqrt{2\pi(n-1)}}$
B_n	$0{,}318\,a$	$0{,}188\,a$	$0{,}153\,a$	$0{,}132\,a$	$\frac{a}{1{,}2\,\pi\sqrt{n}}$
$t_a B_n$	—	0,48	0,54	0,57	$0{,}66\sqrt{\frac{n-1}{n}}$
$t_v B_n$	0,265	0,375	0,460	0,53	$0{,}265\sqrt{n}$

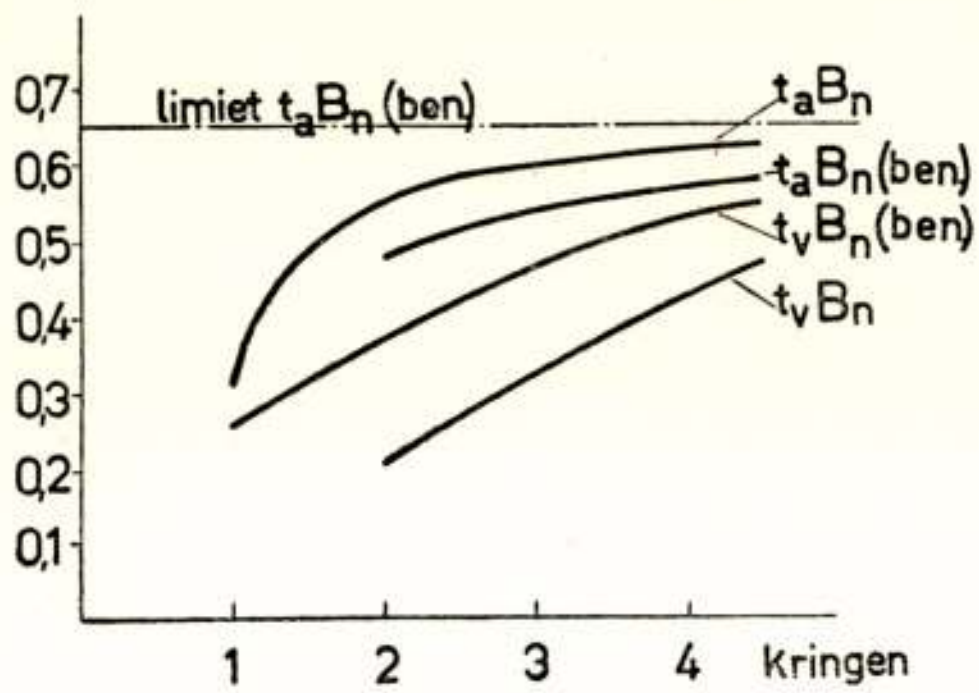


Fig. 4.

3. *Het inschakelen van verstemde kringen.*

De versterker kan ook opgebouwd worden uit kringen die symmetrisch verstemd zijn t.o.v. de draaggolffrequentie.

Heeft bijv. de eerste kring een afstemming bij ω_1, waarbij $\omega_1 = \omega_0 + \triangle$ en de tweede kring bij $\omega_2 = \omega_0 - \triangle$, dan zijn de impedanties van deze kringen volgens (7)

$$Z_1 = \frac{R}{1 + 2j\frac{\Omega - \omega_1}{\omega_1}Q}, \quad Z_2 = \frac{R}{1 + 2j\frac{\Omega - \omega_2}{\omega_2}Q}$$

waarbij aangenomen is dat de impedanties bij resonantie gelijk zijn.

Voor $\Omega - \omega_0 = \omega$ wordt de impedantie voor deze beide kringen in cascade:

$$Z^2 = \frac{R^2}{\left\{1 + 2j\frac{\omega - \triangle}{\omega_1}Q\right\}\left\{1 + 2j\frac{\omega + \triangle}{\omega_2}Q\right\}}$$

zodat

$$Z^2 = \frac{R^2}{1 + 4j\frac{\omega}{\omega_0}Q - 4\frac{\omega^2 - \triangle^2}{\omega_0^2}Q^2} \tag{20}$$

met

$$\frac{\omega + \triangle}{\omega_1} \approx \frac{\omega + \triangle}{\omega_0} \quad \text{en} \quad \frac{\omega - \triangle}{\omega_2} \approx \frac{\omega - \triangle}{\omega_0}$$

Met

$$\frac{\omega_0}{Q} = 2\,a$$

gaat dit over in

$$Z^2 = \frac{R^2}{1 + \frac{2\,j\,\omega}{a} - \frac{\omega^2 - \Delta^2}{a^2}}$$

$$Z^2 = \frac{a^2}{a^2 + \Delta^2}\,\frac{R^2}{1 + \frac{2\,j\,\omega\,a}{a^2 + \Delta^2} - \frac{\omega^2}{a^2 + \Delta^2}} \tag{21}$$

In dit geval wordt

$$f(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\,j\,\omega\,a}{a^2 + \Delta^2} - \frac{\omega^2}{a^2 + \Delta^2}}$$

Er is dus ook hier aan de voorwaarden 5) en 6) voldaan. De vergelijking voor de omhullende wordt dus

$$E(t) = \frac{1}{2\,\pi\,j}\int \frac{e^{pt}}{p\left(1 + \frac{2\,p\,a}{a^2 + \Delta^2} + \frac{p^2}{a^2 + \Delta^2}\right)}\,dp$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\,\pi\,j}\int \frac{e^{pt}}{1 + \frac{2\,p\,a}{a^2 + \Delta^2} + \frac{p^2}{a^2 + \Delta^2}}\,dp =$$

$$= \frac{a^2 + \Delta^2}{2\,\pi\,j}\int \frac{e^{pt}}{p^2 + 2\,p\,a + a^2 + \Delta^2}\,dp$$

De polen van de integraal liggen daar waar

$$p^2 + 2\,p\,a + a^2 + \Delta^2 = 0$$

dus

$$p_1 = -\,a + j\,\Delta$$

$$p_2 = -\,a - j\,\Delta$$

Nu is

$$\frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{1}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right) \quad \text{dus}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{a^2 + \Delta^2}{2\,j\,\Delta}\left(e^{-at + j\Delta t} - e^{-at - j\Delta t}\right) = \frac{a^2 + \Delta^2}{\Delta}\,e^{-at}\sin\Delta\,t$$

Het maximum hiervan treedt op waar

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = 0 \quad \text{of} \quad tg \triangle t_v = \frac{\triangle}{\alpha}$$

zodat

$$\left(\frac{d E}{d t}\right)_{max} = \frac{\alpha^2 + \triangle^2}{\triangle} e^{-\frac{\alpha}{\triangle} bg\, tg \frac{\triangle}{\alpha}} \frac{\frac{\triangle}{\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{\triangle^2}{\alpha^2}}}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \triangle^2}\, e^{-\frac{\alpha}{\triangle} bg\, tg \frac{\triangle}{\alpha}}$$

In dit geval is dus

$$t_a = \frac{1}{\left(\frac{d E}{d t}\right)_m} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\triangle^2}{\alpha^2}}} e^{\frac{\alpha}{\triangle} bg\, tg \frac{\triangle}{\alpha}} \tag{22}$$

en

$$t_v = \frac{1}{\triangle} bg\ tg\ \frac{\triangle}{\alpha} \tag{23}$$

Deze formules zijn ook weer te koppelen met de nu optredende bandbreedte. Deze is te vinden uit (21), dus

$$Z^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \triangle^2} \quad \frac{R^2}{1 + \frac{2 j \omega \alpha}{\alpha^2 + \triangle^2} - \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \triangle^2}}$$

De $\frac{1}{\sqrt{2}}$ breedte wordt gegeven door $\omega = \pi B$ uit de vergelijking

$$\left(1 - \frac{\pi^2 B^2}{\alpha^2 + \triangle^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \pi B \alpha}{\alpha^2 + \triangle^2}\right)^2 = 2$$

$$\because B = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\triangle^2}{\alpha^2} - 1 + \sqrt{2\left(\frac{\triangle^4}{\alpha^4} + 1\right)}} \tag{24}$$

Hieruit is te zien dat zowel $B t_a$ als $B t_v$ functies worden van $\frac{\triangle}{\alpha}$.

Uit de formules (22), (23) en (24) voor t_a, t_v en B is te berekenen tabel II:

TABEL II

$\frac{\triangle}{a} =$	0	0,5	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4
$Bt_a =$	0,552	0,603	0,70	0,74	0,744	0,74	0,715	0,645	0,66
$Bt_v =$	0,205	0,247	0,355	0,453	0,495	0,525	0,570	0,603	0,648

Uit de tabal II en fig. 5 blijkt, dat Bt_a een maximum heeft voor $\frac{\triangle}{a} = 1{,}75$, en dat Bt_v steeds toeneemt.

Vergelijking met tabel I en fig. 4 laat zien dat voor $\triangle = 0$ Bt_a voor 2 gekoppelde kringen overgaat in Bt_a voor 2 kringen in cascade, hetgeen ook te verwachten was. Bovendien is de conclusie te trekken dat bij een constante breedte B de aanlooptijd

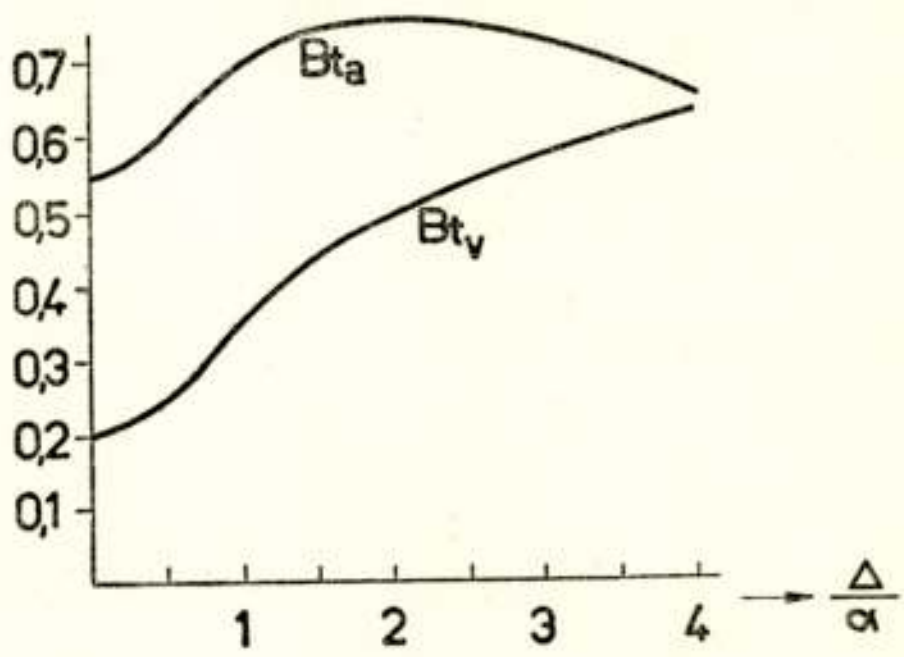


Fig. 5.

voor 2 verstemde kringen dus groter is dan voor 2 of meer gelijkafgestemde kringen (mits de verstemming niet al te groot wordt).

Voor het geval dat $\triangle = a$ verschijnen er eenvoudige formules. Uit (22) volgt n.l.

$$t_a = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2}} e^{bg\,tg\,1} = \frac{1}{a\sqrt{2}} e^{\pi/4}$$

Uit (23) volgt:

$$t_v = \frac{1}{\triangle} bg\,tg\,1 = \frac{1}{\triangle}\frac{\pi}{4}$$

en uit 24:

$$B = \frac{a}{\pi}\sqrt{2}$$

zodat

$$Bt_a = \frac{1}{\pi} e^{\pi/2} = 0{,}7$$

$$Bt_v = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}355$$

4. *Het inschakelen van gekoppelde kringen.*

Voor een bandfilter, opgebouwd uit twee gelijke kringen is voor frequenties in de buurt van de frequentie die in het midden van de doorlaatband ligt (overeenkomend met de draaggolffrequentie) de impedantie te schrijven als:

$$Z = \frac{R}{1 + k^2 Q^2 + 2j\frac{\omega}{a} - \frac{\omega^2}{a^2}}$$

Voor $k^2 Q^2 = \frac{\triangle^2}{a^2}$ gaat dit over in de vergelijking (21) voor twee symmetrisch verstemde kringen. De berekening van de vorige paragraaf geldt dus ook voor gekoppelde kringen. Het bijzondere geval van $\triangle = a$ komt overeen met $k^2 Q^2 = 1$, dus met kritische koppeling. Een kringenpaar bestaande uit een paar symmetrisch verstemde kringen in cascade gedraagt zich dus identiek met een bandfilter uit twee gekoppelde kringen bestaand.

5. *Het inschakelen van meerdere paren gekoppelde of verstemde kringen.*

Voor een aantal paren symmetrisch verstemde of gekoppelde kringen wordt de vergelijking voor de omhullende:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\pi j}(a^2 + \triangle^2)n \int \frac{e^{pt}}{(p - p_1)^n (p - p_2)^n}\, dp$$

Van deze integraal liggen n-voudige polen bij $p = p_1$ en bij $p = p_2$, zodat de oplossing luidt:

$$\frac{dE}{dt} = (a^2 + \triangle^2)^n \left(\frac{1}{n-1}\right)! \left[\left\{ \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \frac{e^{pt}}{(p-p_2)^n} \right\}_{p=p_1} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \frac{e^{pt}}{(p-p_1)^n} \right\}_{p=p_2} \right]$$

Dit is niet in een eenvoudige gedaante te brengen.

Voor verschillende waarden van n is $\frac{dE}{dt}$ en t_v uit te rekenen, die evenals de uitdrukking voor B dan functies van a en $\triangle$ zijn.

Voor $a = \triangle$ volgt dan gemakkelijk:

	Bt_a	Bt_v
1 kringenpaar	0,7	0,355
2 kringenparen	0,77	0,615
3 ,,	0,8	1,02
4 ,,	0,82	1,28

Een vergelijking met enkele kringen volgens fig. 4 en tabel I leert dat de aanloop- en verschuivingstijden bij gekoppelde kringen dus groter zijn dan bij enkele kringen.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Over ferromagnetische toestanden

door J. Giltay

SUMMARY

Some regularities in the behaviour of ferromagnetic materials are formulated anew after a criticism of their formulation in Madelungs laws. Moreover a new kind of diagrams to use with the *B-H*-diagrams is introduced. As an application the linearisation attained in magnetic sound recording by the addition of a high frequency is explained.

1. *Inleiding.*

Het is nog niet zo lang geleden, dat de techniek van ferromagnetische materialen óf een zo groot mogelijke, óf een zo klein mogelijke hysteresis eiste en dat zij weinig aanleiding vond de aandacht speciaal te richten op de rijkdom aan mogelijke toestanden van het materiaal, die de hysteresis biedt.

Mede door de ontwikkeling van ferromagnetische geluidsdragers is bedoeld verwaarloosd gebied thans actueel geworden. Van veel belang ervoor schijnen enige regelmatigheden, die E. Madelung, eigenlijk maar terloops, in een verhandeling in 1905[1]) noemde en aan welke in een bekend handboek[2]) een plaats is ingeruimd onder de naam van „wetten van Madelung".

2. *De wetten van Madelung.*

Madelung beschouwt zijn materiaal aan de hand van een *B-H*-diagram en noemt een punt van een lijn, die een magnetisch proces in dit diagram voorstelt, een „omkeerpunt" als de richting waarin de veldsterkte *H* verandert aldaar omkeert (b.v. het punt *P* in fig. 1).

---

[1]) E. Madelung, Ann der Physik 17 (1905) 865-867.

[2]) Handbuch der Physik, Bd XV, 107.

De eerste wet luidt dan, dat de kromme (PQ in fig. 1), die in een *B-H*-diagram bij monotone verandering van *H* zal worden beschreven, gedefinieerd is door het omkeerpunt (*P*), waaruit de kromme ontspringt.

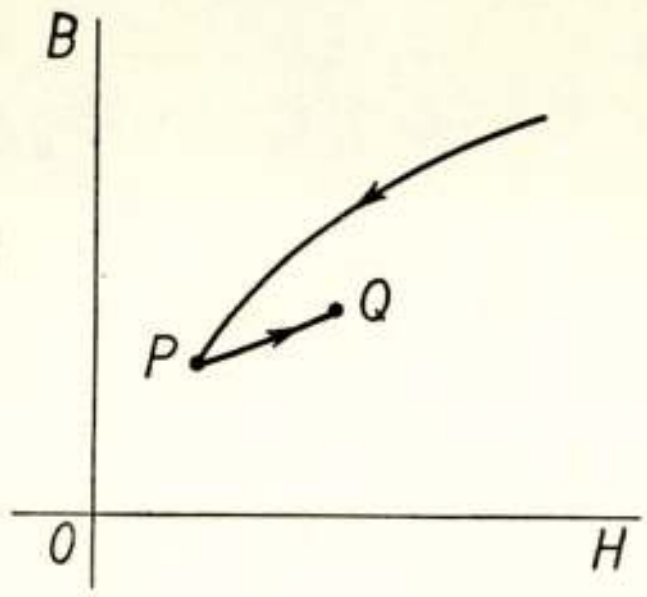


Fig. 1.

Wanneer men deze wet letterlijk neemt is zij zeker niet onder alle omstandigheden juist. Zij komt in conflict met wezenlijke karaktertrekken van het ferromagnetisme als men haar gebruikt in gevallen, die anders liggen dan dat, waarin Madelung haar toepast. Dit zij toegelicht door het voorbeeld in fig. 2, waar de grootst mogelijke hysteresislus van het materiaal (hierna grenslus te noemen) is afgebeeld

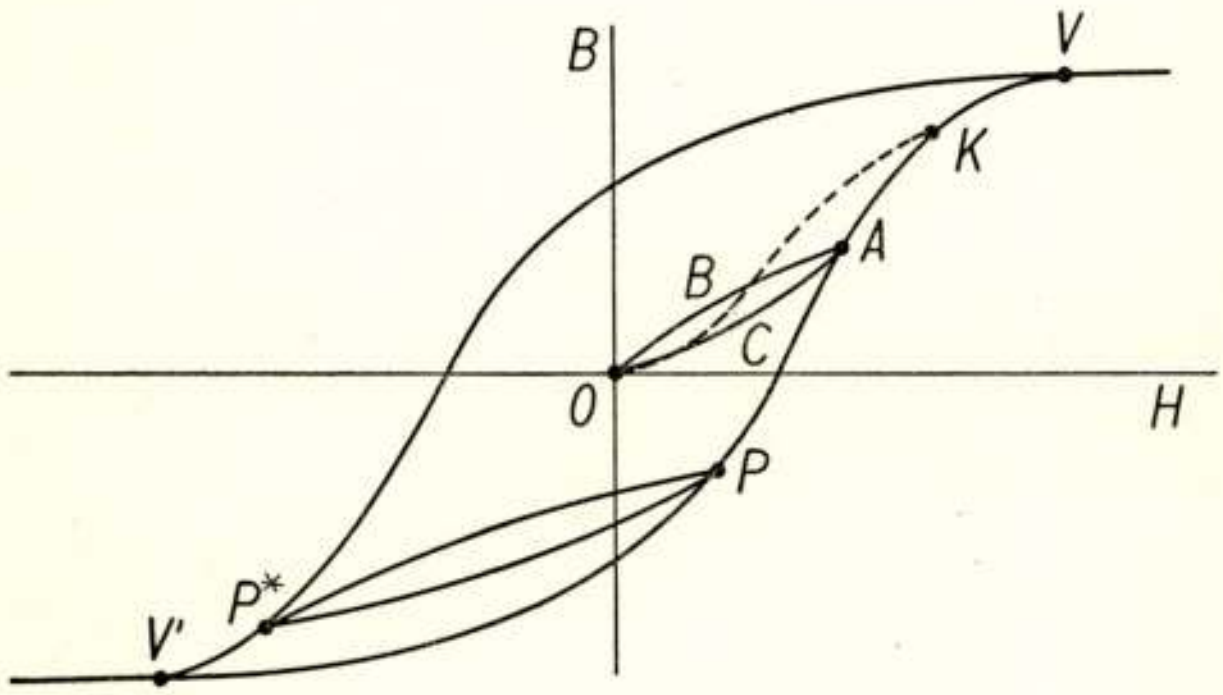


Fig. 2.

met een punt *A* daarop, vanwaar men door *H* monotoon tot nul te verminderen via een kromme *A B O* juist in de oorsprong *O* belandt. In het materiaal zijn dan de veldsterkte *H* en de magnetisatie *B* beide nul geworden, hoewel het materiaal niet

in de maagdelijke toestand is. Het verschil tussen deze pseudo-maagdelijke toestand en de maagdelijke toestand kan bij magnetisering blijken. Voert men n.l. H weer op, dan komt men vanuit de eerste toestand via kromme OCA weer in A terug (althans bij grote benadering), waarbij OCA voor de meeste materialen overal bol naar onderen is. Vanuit de maagdelijke toestand gaat men daarentegen over de door een stippellijn aangeduide normale magnetiseringskromme, die al spoedig hol naar onderen wordt.

Nu is O voor OCA een omkeerpunt in de zin van de eerste wet van Madelung. Evenwel is O in dezelfde zin ook als een omkeerpunt voor de getekende normale magnetiseringskromme op te vatten. De maagdelijke toestand kan immers bereikt worden door ommagnetisering in een wisselveld met ter weerszijden van nul gelijke grootste uitwijkingen als de amplitude van dit wisselveld uiterst langzaam tot nul verminderd wordt. De aan dit proces aansluitende normale magnetiseringskromme heeft dan dus (onverschillig of H in positieve of in negatieve zin wordt veranderd) in O een omkeerpunt. Ware nu OCA door het omkeerpunt O alleen bepaald, dan zou deze kromme met de gestippeld getekende normale magnetiseringskromme moeten samenvallen, wat bij geen benadering het geval is.

Het valt niet te ontkennen, dat O voor de normale magnetiseringskromme een enigszins bijzonder omkeerpunt is. Bij een minder volmaakt ontmagnetiseringsproces met in b.v. twintig trappen op nul geregeld veld komt men in een punt nabij de oorsprong, dat voor één der magnetiseringskrommen van de corresponderende toestand een zeer gewoon omkeerpunt is en voor dit punt kan men met geringe wijzigingen de voorgaande redenering herhalen.

De formulering van de tweede en derde wet van Madelung wordt door deze beschouwing eveneens ondermijnd. Wij zullen deze wetten hier niet uitvoerig vermelden, doch slechts mededelen, dat men volgens de tweede wet, nadat men op de getekende wijze in fig. 1 in Q is aangekomen, door H te verminderen tot P zou moeten kunnen terugkeren. Wij merken op, dat men uit een punt van de normale magnetiseringskromme door H te verminderen nimmer in de oorsprong terug kan keren.

3. *Ferromagnetische toestanden*

Nadat wij hadden opgemerkt, dat in bepaalde gevallen toe-

passing van de wetten van Madelung tot onjuiste resultaten leidde, hoopten wij, dat door een kleine wijziging in de formulering dit bezwaar zou kunnen worden ondervangen, opdat de belangrijke informatie, die deze wetten in vele gevallen geven, niet verloren behoefde te gaan. Het schijnt evenwel, dat laatstgenoemd doel slechts door een tamelijk sterk afwijkende opzet bereikbaar is. In het bijzonder dient het begrip „ferromagnetische toestand" geïntroduceerd te worden, hetgeen wij bij dezen willen doen.

Het gedrag van een ferromagneticum is als gevolg van de hysteresis in het algemeen niet door de heersende waarden van $\overline{H}$ en $\overline{B}$ bepaald. Men zegt soms, dat dit gedrag mede door de voorgeschiedenis wordt beheerst. Dit kan men volhouden, vooral als men de gehele physisch-chemisch-magnetische voorgeschiedenis, in het bijzonder ook de thermische en de rheologische, mede daarbij insluit.

Evenwel kan men toch ook volhouden, dat deze voorgeschiedenis aan het materiaal in de beschouwde omstandigheden bepaalde eigenschappen heeft verleend en wanneer men deze in het oog vat, kan men ze samenvatten in één begrip: de magnetische toestand. Microscopisch is de magnetische toestand als een bepaalde statistische verdeling van de ligging der elementairmagneetjes op te vatten, doch wij willen hier liever een in hoofdzaak macroscopische terminologie gebruiken.

Opdat het begrip (ferro-)magnetische toestand hanteerbaar zij, moet een criterium voor de gelijkheid of identiteit (macroscopische) van twee zulke toestanden bestaan. Dit criterium is, dat men de ene toestand door de andere moet kunnen vervangen, waarbij natuurlijk de oriëntering goed gekozen moet worden; zo zullen o.a. $\overline{H}$ en $\overline{B}$ in het ene geval zo georiënteerd moeten kunnen worden door een rotatie van het gehele beschouwde elementaire materiaalvolume, dat deze met $\overline{H}$ en $\overline{B}$ van de andere toestand overeenstemmen. Bedoelde vervanging moet men dan macroscopisch niet gewaar kunnen worden, in het bijzonder moet men in beide gevallen dezelfde krommen in B-H-diagrammen verkrijgen, als men $\overline{H}$ in beide gevallen volgens hetzelfde programma wijzigt.

4. *Lineamagnetische toestanden en processen.*

De ferromagnetische toestanden, die uit de maagdelijke toestand kunnen worden verkregen door veranderingen van $\overline{H}$, waarbij

$\overline{H}$ steeds langs eenzelfde lijn valt ($\overline{H}$ mag wel van teken veranderen) en waarbij ook $\overline{B}$ steeds langs diezelfde lijn valt, zullen wij lineamagnetische toestanden noemen. Wanneer een medium een continuüm van lineamagnetische toestanden doorloopt, noemen wij dit een lineamagnetisch proces. Zulke processen zijn de enige magnetische processen, die tamelijk volledig door de gewone B-H-diagrammen geïllustreerd worden. De lijn waarlangs $\overline{H}$ en $\overline{B}$ vallen noemen wij nog de (lineamagnetische) as.

Analoog noemen wij de ferromagnetische toestanden, die uit de maagdelijke toestand kunnen worden verkregen door veranderingen van $\overline{H}$, waarbij $\overline{H}$ en $\overline{B}$ beide voortdurend in een bepaald plat blijven liggen planimagnetische toestanden. Genoemd (planimagnetisch) vlak moet niet verward worden met het z.g. magnetische vlak, dat bij sommige kristallen wordt aangetroffen[3]).

Ter illustratie van de hantering van de ingevoerde begrippen zij hier beschreven hoe een lineamagnetische toestand als eindpunt van een planimagnetisch proces kan optreden. Veronderstel, dat het medium in de maagdelijke toestand voor richtingen gelegen in het planimagnetische vlak isotroop is. Neem in dit vlak een $\overline{H}$ van constante grootte aan, doch laat de richting van de vector met een grote begin-amplitude, b.v. van duizend graden in genoemd vlak om een bepaalde stand slingeren. Laat nu de amplitude der slingering zeer langzaam tot nul verminderen. $\overline{B}$ en $\overline{H}$ zullen dan tenslotte langs dezelfde lijn liggen en zij zullen langs deze lijn blijven vallen als $\overline{H}$ niet anders dan in grootte veranderd wordt.

5. *Wet voor het lineamagnetisme.*

De wet, die wij in de plaats van Madelungs formulering zouden willen stellen luidt nu:

Als bij een lineamagnetisch proces wordt uitgegaan van een begintoestand, waarbij H en B resp. H_0 en B_0 bedragen en als tijdens dit proces steeds geldt

$$H \geqq H_0$$

dan heeft men de volgende regelmatigheden:

1. Tijdens dit proces is $B \geqq B_0$.
2. Zo dikwijls als voor $H = H_0$ ook weer geldt $B = B_0$ is

---

[3]) Handbuch der Physik, Bd XV, 269.

de ferromagnetische toestand gelijk aan die van de begintoestand.

3. Wordt de oorspronkelijke toestand weer bereikt en is H_1 de grootste waarde, die H heeft aangenomen tussen dit ogenblik en het begin van het proces, dan zal, zo dikwijls H weer H_0 wordt zonder H_1 te hebben overschreden, de oorspronkelijke toestand opnieuw intreden.

Een eenvoudig geval, waarin deze wet exact zou gelden is het volgende:

Een ferromagnetisch medium bestaat uit een conglomeraat van molecuulcomplexen, die zich elk als één geheel gedragen onder invloed van een uitwendig magneetveld en elkaar onderling niet beïnvloeden. Verder wordt verondersteld, dat de vector van de magnetisatie van een complex evenwijdig aan de veldsterkte van het (uniform gedachte) uitwendige veld verloopt en dat de richting der magnetisatie omklapt naar de richting van het uitwendige veld, zodra dit laatste numeriek boven een bepaalde waarde (die voor elk complex verschillend kan zijn) stijgt.

Dat de hierboven geformuleerde wet voor dit model geldt ziet men als volgt: Het uitwendige veld zij in het begin H_0. Oorspronkelijk zullen zekere complexen in de richting, waarin H_0 positief gerekend wordt, gemagnetiseerd zijn en de overige in de tegenovergestelde richting. De eerstgenoemde noemen wij de oorspronkelijk positieve complexen, de andere de oorspronkelijk negatieve. Tijdens een proces, waarbij $H \geqq H_0$ is, kunnen de oorspronkelijk positieve complexen nooit hun magnetisatie omklappen. Van de negatieve is dit wel denkbaar, dus geldt punt (1) der wet: $B \geqq B_0$.

Wordt ooit weer $B = B_0$ voor $H = H_0$, dan moeten alle oorspronkelijk negatieve complexen blijkbaar weer negatief zijn (anders ware $B > B_0$), alle complexen hebben dus een magnetisatie als oorspronkelijk. De oorspronkelijke ferromagnetische toestand is dan dus hersteld. Dit bewijst punt (2) van de wet.

Stel nu, dat de oorspronkelijke toestand is teruggekeerd, nadat H ten hoogste de waarde $H_1 (> H_0)$ had aangenomen. Het is mogelijk, dat tijdens het proces sommige oorspronkelijk negatieve complexen tijdelijk positief zijn geweest. De complexen, waarbij dit zich heeft voorgedaan zijn uitsluitend te zoeken onder die oorspronkelijk negatieve complexen, die voor $H = H_0$ alleen maar negatief kunnen zijn, want anders waren zij posi-

tief gebleven en zou $B > B_0$ zijn geworden voor $H = H_0$. Nu zal men later H ook kunnen opvoeren, mits niet voorbij H_1, en zeker zijn, dat, als H weer H_0 gemaakt wordt, alle tijdens het proces van negatief naar positief omgeklapte complexen weer teruggeklapt en dus weer negatief zijn voor $H = H_0$. Hiermede is punt (3) aangetoond.

Het is duidelijk, dat dit model op verschillende wijzen te verruimen zou zijn. In het bijzonder kan men zich gemakkelijk vrijmaken van de beperking der evenwijdigheid tussen de magnetisaties der complexen en het uitwendige veld. Ook kan men die onderlinge beïnvloeding toelaten, die als macroscopische ontmagnetiserende kracht geïnterpreteerd kan worden.

Omdat bij nikkel de voorkeursrichtingen der magnetisatie der complexen volgens de lichaamsdiagonalen van een kubus gericht zijn, kan men daar (in zekere benadering) elk complex als superpositie van drie complexen opvatten, elk met een omklapbare magnetisatie, waarbij de magnetisaties der 3 complexen steeds onderling loodrecht zijn. Ook voor zulk een model zal de genoemde wet gelden.

Hoewel de bedoelde wet dus op verschillende modellen gebaseerd kan worden, zullen wij de wet hier verder beschouwen te gelden los van elk model, dus zuiver phenomenologisch.

Dat wij de wet alleen voor $H \geqq H_0$ hebben geformuleerd heeft als enige reden, dat wij ons eenvoudig wilden kunnen uitdrukken. Daar op de lineamagnetische as naar believen de ene of andere richting als de positieve kan worden beschouwd, kan aan de huidige formulering ook ontleend worden, wat voor regelmatigheden optreden als men steeds heeft $H \leqq H_0$.

6. *Toegevoegde toestanden.*

In het volgende is verder steeds sprake van lineamagnetische processen en toestanden met een bepaalde en steeds gegeven geachte as, zodat de processen door het uitzetten van de moduli der vectoren $\overline{H}$ en $\overline{B}$ in een B-H-diagram gevolgd kunnen worden.

Laat een proces tot een weg PQ aanleiding geven (fig. 3) en laat het terugbrengen van H tot de waarde in P weer naar het punt P terugvoeren (in het algemeen langs een andere weg). Volgens punt (2) der wet van § 5 is dan de oorspronkelijke toestand hersteld. Hieruit volgt, dat als H wéér wordt opgevoerd Q wéér bereikt moet worden en wel ontstaat daarbij

volgens hetzelfde punt van de genoemde wet (nu toegepast met Q als uitgangstoestand en onder toekenning aan B en H van het tegengestelde teken als het volgens fig. 3 overeengekomene) de toestand, die de eerste maal in Q heerste opnieuw. Hieruit volgt, dat men willekeurig vaak van P naar Q en omgekeerd kan gaan en dan steeds de oude toestanden zal terugvinden. Toestanden, waartussen zulk een relatie bestaat, noemen wij toegevoegde toestanden en de lus in het B-H-diagram gevormd door de wegen, die deze toestanden in elkaar overvoeren, noemen wij de toevoegende lus. De opstijgende tak van de toevoegende lus in fig. 3 wordt met PQ aangeduid, de dalende met QP. De lus zelve kan naar verkiezing de lus PQ of de lus QP worden genoemd. P en Q heten de omkeerpunten van de lus.

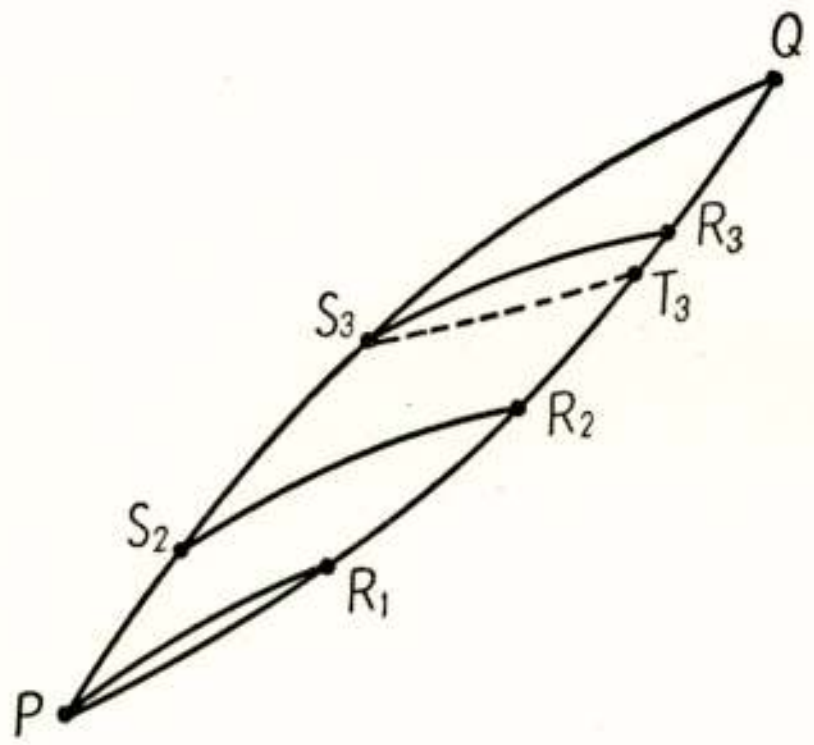


Fig. 3.

Wij kunnen nog opmerken, dat een toevoegende lus zichzelve niet kan snijden, daar zulke snijpunten volgens punt (2) van de wet van § 5 toegevoegd zijn aan de omkeerpunten en vervolgens ook onderling toegevoegd blijken te zijn. Hierdoor zou de oorspronkelijke lus uiteenvallen in toevoegende lussen met positieve en negatieve omloopsrichting. De eerste dezer lussen kunnen echter in verband met de tweede hoofdwet der thermodynamica niet bestaan.

De punten V en V^{I} in fig. 2, waar de grenslus zich sluit en die wij de vertakkingspunten noemen, zijn klaarblijkelijk toegevoegde punten met de grenslus als toevoegende lus.

7. *Lus en binnenlus.*

Indien wij, in een punt (b.v. R_1) van PQ in fig. 3 aangekomen

zijnde, H weer doen afnemen, moet volgens punt (3) van de wet van § 5 het punt P weer bereikt worden. Elk punt van PQ is dus toegevoegd aan P, evenzo elk punt van QP aan Q. De op deze toevoegingen betrekking hebbende toevoegende lussen noemen wij binnenlussen van de gegeven lus. Binnenlussen, die éénzelfde omkeerpunt met de gegeven lus gemeen hebben, noemen wij gelijksoortig.

In fig. 3 zijn de beide belangrijkste typen van binnenlussen, die zich voordoen, in hun ligging in de gegeven lus geschetst als de lussen PR_1 en PR_2.

Bij lus PR_1 treft R_1P de tak QP pas in P, bij lus PR_2 treft R_2P de tak QP eerder en wel in S_2. Men kan nu bewijzen, dat de tak R_2P dan vanaf S_2 met QP moet samenvallen. Dit geschiedt door op te merken, dat, waar men vanuit P door H op te voeren in Q komt en van hieruit naar P en terug kan gaan, men volgens punt (3) van de wet van § 5 zeker ook uit S_2 door H op te voeren in Q kan komen. Bij toepassing van de wet wordt hier Q als de oorspronkelijke toestand beschouwd en de positieve richting naar links gekozen.

Vanuit Q kan men weer door verminderen van H in S_2 komen, waar wij volgens punt (2) van de wet van § 5 dezelfde toestand moeten aantreffen als eerst. Van deze is ons bekend, dat zij zo is, dat zij door verminderen van H langs een deel van QP naar P voert. Hetzelfde moet dus geschieden als men uit R_2 komt.

8. *Geconjugeerde toestanden.*

Het voorkomen van het binnenlustype PR_2 in fig. 3 is een complicatie, die nader beschouwd moet worden. Bedoeld type binnenlus moge het conjunctie-type worden genoemd.

Het stuk R_2S_2 in fig. 3 noemen wij het vrije deel van de binnenlus PR_2 in de lus PQ. Wij willen nu een bijzondere veronderstelling maken:

De vrije delen van *gelijksoortige* binnenlussen van het conjunctietype hebben nooit een punt gemeen ook niet de begin- of de eindpunten.

In fig. 3 is R_3S_3 het vrije deel van de binnenlus PR_3. Volgens bovengemaakte onderstelling kan dus R_3S_3 met R_2S_2 geen punt gemeen hebben.

Deze onderstelling heeft een belangrijke consequentie. De tak S_3Q van de toevoegende lus S_3Q, die in elk geval R_3 bevat,

omdat ook S_3 en R_3 toegevoegde punten zijn, kan niet reeds in een van R_3 verschillend punt, b.v. T_3 in fig. 3, op PQ aankomen, omdat dan de vrije delen van de gelijksoortige binnenlussen PR_3 en PT_3 minstens het punt S_3 gemeen zouden hebben.

De eindpunten van een vrij deel van een binnenlus van het conjunctie-type zijn dus aan elkaar toegevoegd door een lus, die slechts twee punten en in elk geval geen lijnsegment met de oorspronkelijk gegeven lus gemeen heeft. Bedoelde aan elkaar toegevoegde eindpunten noemen wij geconjugeerde punten.

Geconjugeerde toestanden of punten worden hier bij voorkeur van elkaar onderscheiden door een sterretje, is de ene toestand P dan kan de andere dus P^* heten.

Voor de praktijk schijnt het voldoende, als wij veronderstellen, dat de complicatie van het voorkomen van geconjugeerde punten zich slechts op de grenslus voordoet.

Als P en P^* geconjugeerde punten op de grenslus $V^1 V$ in fig. 2 zijn, met P op $V^1 V$, dan zal, als we P laten opschuiven tot V het punt P^* mee opschuiven. Het eindpunt der beweging van P^* kan eveneens in V liggen, doch dit behoeft niet. Is er een van V verschillend eindpunt, dan noemen wij dit het geconjugeerde punt van V. Het betreffende punt zal door V^* worden aangeduid.

9. *Omkeerpuntreeksen en magnetiseringskrommen.*

Beginnend bij de toestand in een der vertakkingspunten van de grenslus, kan men een lineamagnetisch proces opstellen, omschreven door de H-waarden van een aantal omkeerpunten (linker $L_1, L_2, \ldots$ en rechter $R_1, R_2, \ldots$), waarbij de omkeerpunten van elke soort afzonderlijk steeds dichter bij een bepaalde, dit proces afsluitende, eindwaarde van H komen. De ferromagnetische toestand E, die zo wordt bereikt is (voor een bepaald materiaal en een bepaalde richting van de lineamagnetische as daarin) natuurlijk volkomen bepaald.

Bij het uitvoeren van dit proces wordt in het B-H-diagram een weg doorlopen (zie fig. 4), die bestaat uit aan elkaar sluitende delen van een reeks lussen, waarvan de volgende steeds een binnenlus is van de voorgaande.

Onder een magnetiseringskromme van een lineamagnetische toestand verstaan wij de B-H-kromme, doorlopen bij het lineamagnetische proces, waarbij de veldsterkte monotoon wordt veranderd tot een der vertakkingspunten is bereikt.

Voor elke lineamagnetische toestand bestaan er derhalve twee. Voor de maagdelijke toestand zijn deze beide congruent, elk van deze wordt de *normale* magnetiseringskromme (voor de gegeven lineamagnetische as in het materiaal) genoemd.

De rechter magnetiseringskromme van de toestand E in fig. 4 voert blijkbaar over R_2 en R_1 naar V en wel langs delen der reeds genoemde lussen. Dit laatste geldt ook voor de andere magnetiseringskromme, die over L_2 en L_1 naar V^1 voert.

Wanneer onder de rechter omkeerpunten van een omkeerpuntreeks een omkeerpunt R voorkomt, dat rechts van één of meer der voorafgaande rechter omkeerpunten ligt, wordt de invloed dezer laatste op de eindtoestand uitgewist. Ook de in-

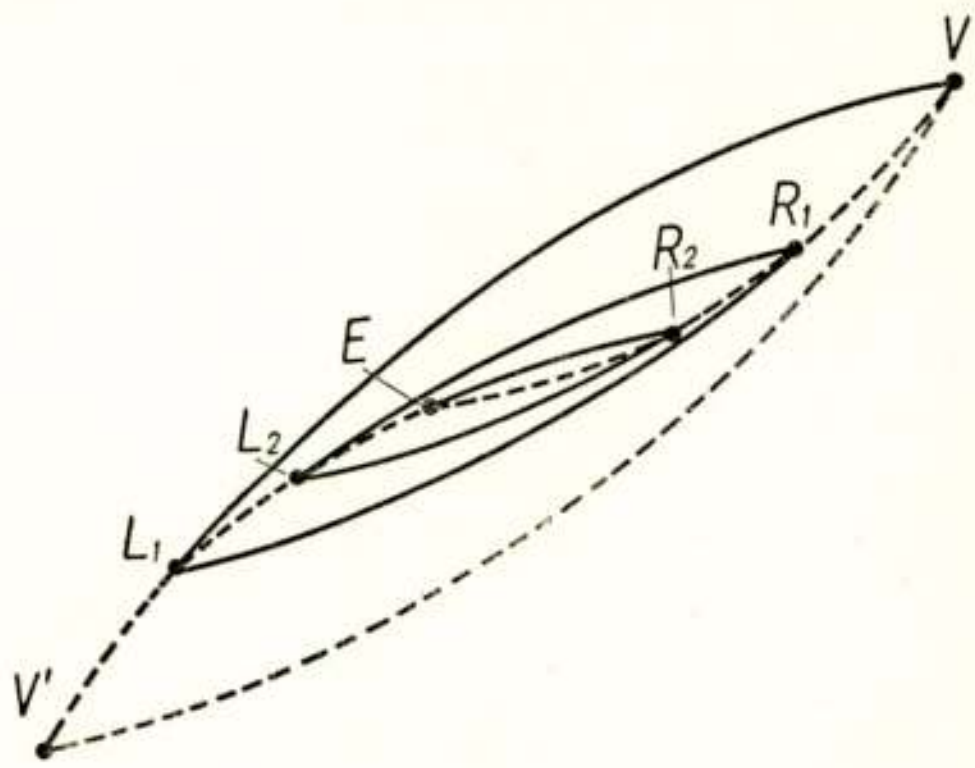


Fig. 4.

R toegevoegde punt op de linker magnetiseringskromme van de toestand in het laatste omkeerpunt vóór R. Het bovenstaande geldt natuurlijk mutatis mutandis ook voor onregelmatigheden in de reeks linkeromkeerpunten.

Omkeerpuntreeksen, die geen onregelmatigheden als boven bedoeld bezitten, noemen wij geordend.

Onder de in de voorgaande paragrafen bindend voorgeschreven onderstellingen schijnt dan te gelden, dat iedere lineamagnetische toestand door een geordende omkeerpuntreeks gekarakteriseerd kan worden.

Het bewijs hiervoor is in de meer eenvoudige gevallen niet zo moeilijk te leveren, hoewel het ook dan wegens de omvang hier niet kan worden weergegeven. Moeilijkheden, o.a. van vloed van één of meer linker omkeerpunten zal er in het algemeen bij worden uitgewist. Hiervoor is de regel, dat dit het geval is bij die linker omkeerpunten, die rechts liggen van het aan

verzamelingstheoretische aard treden op, als men meer ingewikkelde gevallen beschouwt, met name die, waar de omkeerpuntreeksen noodzakelijk continua van punten en/of verdichtingen van allerlei aard moeten bevatten. Deze complicaties kunnen niet geheel terzijde worden geschoven, daar reeds de maagdelijke toestand kan worden voorgesteld als uit de verzadigde toestand verkregen door een proces met een omkeerpuntreeks, die continua van linker en rechter omkeerpunten bezit. Zulke complicaties kan men verwachten b.v. bij alle ferromagnetische toestanden, die door warmtebehandeling ontstaan zijn en zij

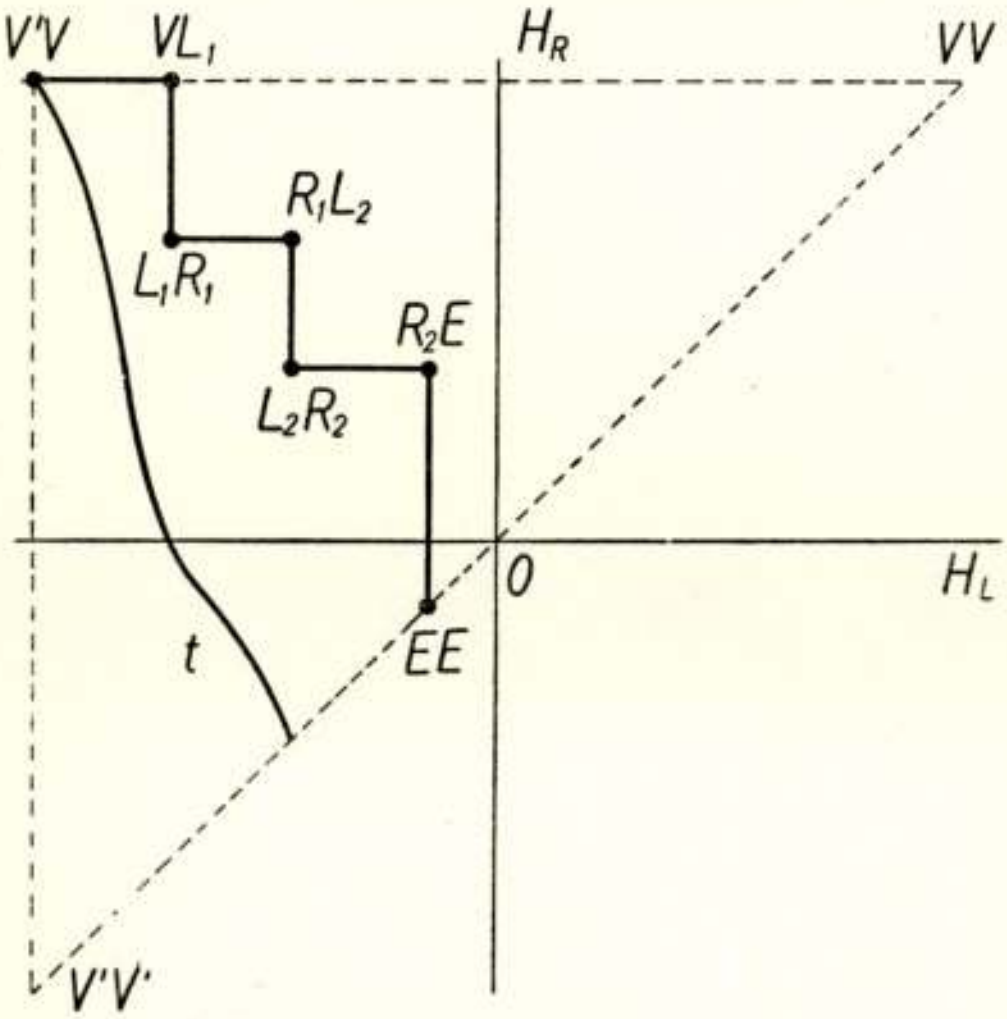


Fig. 5.

vormen ook de geschikte benadering voor toestanden verkregen door toepassing van hoge frequenties bij geluidsregistratie op magnetische dragers. Toestanden met geordende omkeerpuntreeks met continua van omkeerpunten tot bij het eindpunt hebben een lage reversibele permeabiliteit, zoals na het voorgaande gemakkelijk uit een figuur zal worden opgemerkt.

10. *Toestandslijnendiagram.*

Hoewel een paar toegevoegde toestanden in het algemeen niet ondubbelzinnig bepaald wordt door de H-waarde in elk dezer beide toestanden, zijn deze beide grootheden voor dit toestandspaar toch wel van het grootste belang. Wij willen daarom deze beide waarden eens in een diagram uitzetten en

wel de H-waarde van het linker omkeerpunt der toevoegende lus als abscis, de H-waarde van het andere omkeerpunt als ordinaat.

Doen wij dit voor alle in fig. 4 zichtbare lussen en verbinden wij het beeldpunt van elke lus met dat van haar binnenlus door een rechte, dan verkrijgen wij de trapjeskromme in fig. 5.

Opgemerkt moet worden, dat wij nog een toevoegende lus van infinitesimale afmetingen bij E bijgevoegd gedacht hebben, waardoor wij nog een punt EE op de deellijn d van het 1e en 3e kwadrant verkregen. De lijn van V^1V naar EE noemen wij de toestandslijn van de toestand E.

Wanneer wij bij het punt V^1V beginnen (in fig. 5) en telkens de lus V^1V doorlopen en dan langzaam over de toestandslijn naar het punt VL_1 gaan bewegen, dan komt dit laatste overeen met het gaan doorlopen van een aantal toevoegende lussen, die het omkeerpunt V gemeen hebben, waarbij de afmeting dezer lussen geleidelijk tot die van de lus VL_1 afneemt. In VL_1 aangekomen, kunnen wij over de toestandslijn verder gaan door nu de toevoegende lus weer verder in te krimpen, doch nu juist onder het vasthouden van het linker omkeerpunt.

Men ziet, dat het doorlopen van de toestandslijn van V^1V naar EE een proces aan de hand doet om door continue verschuiving der omkeerpunten van een toevoegende lus, die eerst samenvalt met de grenslus, tot de toestand E te komen.

Na het voorgaande zal tevens duidelijk zijn, dat elke lijn, die binnen de gestippeld aangegeven rechthoekige driehoek in fig. 5 van V^1V naar een punt van de hypotenusa loopt zonder ergens een positieve helling aan te nemen, een lineamagnetische toestand bepaalt, zo b.v. de lijn t in fig. 5, want zulk een lijn geeft alle te doorlopen omkeerpunten aan en is dus tevens een voorschrift hoe de toestand teweeg te brengen. In de realiteit zullen de continua van omkeerpunten door kleine sprongsgewijze veranderingen benaderd moeten worden.

Ingevolge het in de vorige paragraaf opgemerkte moet zelfs iedere lineamagnetische toestand (als aan zekere in het voorafgaande gemaakte onderstellingen voldaan is) door zulk een lijn volkomen gekarakteriseerd kunnen worden.

Men ziet hoe eenvoudig in dit toestandslijnendiagram toestanden, die door omkeerpuntreeksen met continua van linker en rechter omkeerpunten bepaald zijn, door een toestandslijn kunnen worden voorgesteld. De maagdelijke toestand b.v. wordt eenvoudig voorgesteld door de rechte van V^1V naar O. Toestanden, die uit

de maagdelijke kunnen ontstaan door enige geringe eindige veranderingen van H, hebben tot toestandslijn een trapjeskromme, (verg. fig. 5), die zijn voortzetting vindt in een rechte met helling -1 door $V^1 V$. Immers zal de magnetiseringskromme van zulke toestanden op enige afstand van de oorsprong met de normale magnetiseringskromme beginnen samen te vallen.

11. *De intreedlijn.*

Hoewel een toestandslijn natuurlijk over het punt $V^1 V$ zou kunnen worden voortgezet buiten de gestippelde driehoek in fig. 5 is dit van weinig nut, daar de vorm van dit deel geen

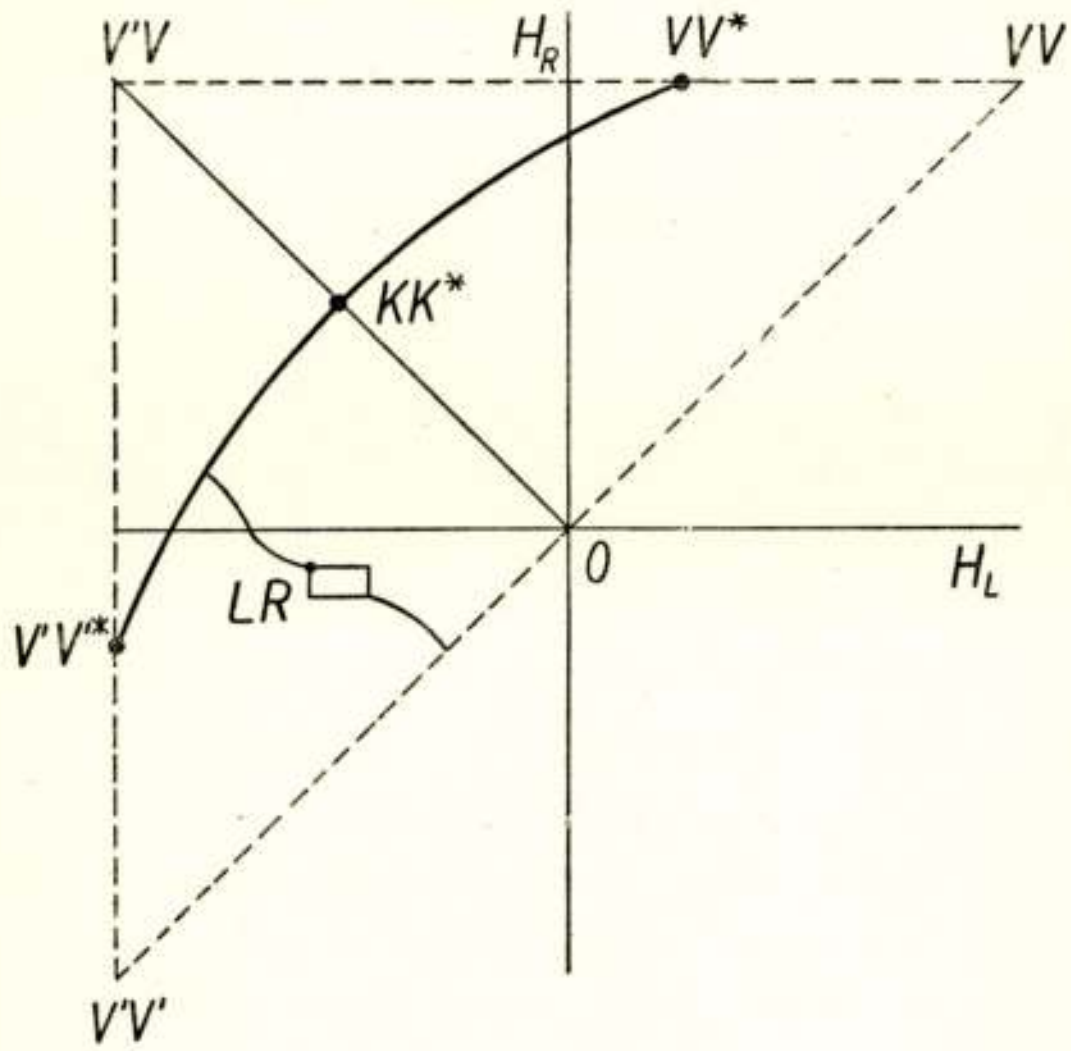


Fig. 6.

invloed op de toestand uitoefent. Zelfs het deel van de toestandslijn, dat langs één der rechthoekszijden van genoemde driehoek ligt, is zonder invloed en kan door een willekeurig verloop buiten de driehoek vervangen worden.

In het geval, dat op de grenslus geconjugeerde punten gevonden worden, verdient het aanbeveling de beeldpunten van de toevoegende lussen tussen deze puntenparen in het toestandslijnen diagram aan te geven. Zij vormen een kromme lijn, die symmetrisch is ten opzichte van de deellijn van het tweede kwadrant en die haar eindpunten $V^1 V^{1*}$ en $V V^*$ op de rechthoekszijden van de meergenoemde driehoek met de hoekpunten $V^1 V^1$, $V^1 V$ en $V V$ heeft, zoals in fig. 6 is afgebeeld.

Vult men deze kromme met delen der rechthoekszijden en de hypotenusa van genoemde driehoek aan tot een gesloten kromme en noemt men het inwendige daarvan het toestandsveld en de omtrek met uitzondering der hypotenusa de intreedlijn, dan kan men zich aldus uitspreken:

Iedere kromme door het toestandsveld, die ontspringt op de intreedlijn, eindigt op de hypotenusa en nergens een positieve-helling vertoont, bepaalt als toestandslijn ondubbelzinnig een lineamagnetische toestand.

Als er geconjugeerde punten op de grenslus zijn, is er zeker een paar, dat symmetrisch ligt ten opzichte van de oorsprong. Deze punten K en K^* bezitten een toevoegende lus, waarvan het beeldpunt KK^* in het toestandslijnendiagram het snijpunt is van de toestandslijn van de maagdelijke toestand met de

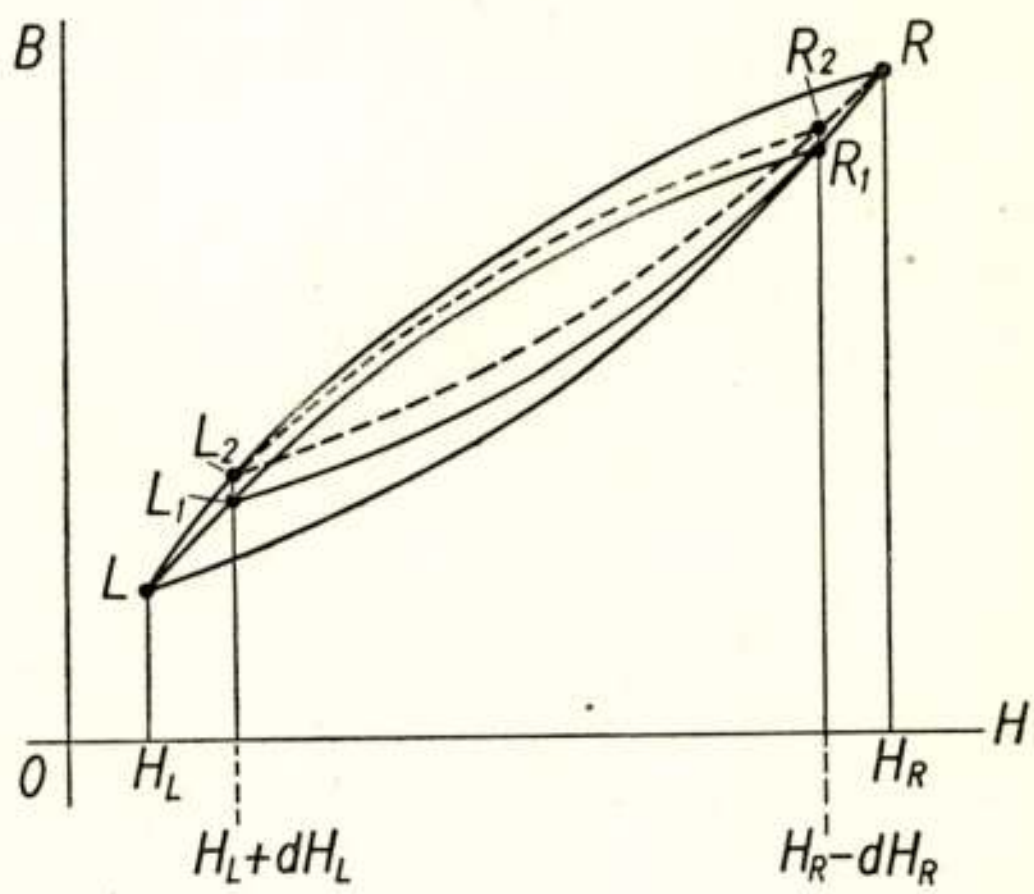


Fig. 7.

intreedlijn. De punten K en K^* zijn dus de punten op de grenslus, waar de normale magnetiseringskrommen niet meer van de dalende of stijgende tak van de grenslus onderscheiden kunnen worden (In fig. 2 is K reeds aangegeven).

12. *Variatie van een toestandslijn.*

Wij beschouwen een toestandslijn, die door de drie punten (H_L, H_R), $(H_L, H_R - dH_R)$ en $(H_L + dH_L, H_R - dH_R)$, waarvan het eerste in fig. 6 met LR is aangegeven, loopt. Tussen genoemde punten is de toestandslijn telkens recht, daar positieve hellingen zijn uitgesloten.

Daarnaast beschouwen wij een gevariëerde toestandslijn, die gelijk is aan de reeds beschrevene, behoudens dat deze tussen het eerste en laatste der drie punten nu over het punt $(H_L + dH_L, H_R)$ loopt. Beide lijnen sluiten dus een infinitesimaal rechthoekje in ter grootte van $dH_L \,.\, dH_R$, welk product wij $d\,O$ zullen stellen. Dit rechthoekje is in fig. 6 buiten schaal aangegeven.

Bezien wij nu het B-H-diagram in fig. 7.

Het punt (H_L, H_R) in het toestandslijnendiagram stelt een lus LR in het B-H-diagram voor. In het punt $(H_L, H_R - d\,H_R)$ over de toestandslijn aangekomen, is de lus tot de lus $L\,R_1$ in fig. 7 ingekrompen. In het derde punt aangekomen is de lus $L_1\,R_1$ bereikt.

Langs de andere toestandslijn gaande is daarentegen in het punt $(H_L + dH_L, H_R)$ de lus $L_2\,R$ bereikt en is men in het derde punt op de lus $L_2\,R_2$ gekomen, waarvan de omkeerpunten blijkbaar hoger liggen dan die van de lus $L_1\,R_1$. Wij willen nagaan, hoeveel hoger zij liggen.

Daartoe merken wij op, dat, zoals uit fig. 7 duidelijk is, zowel de afstand $L_2\,L_1$ als de afstand $R_2\,R_1$ evenredig is met dH_L en dH_R, dus met $d\,O$. De evenredigheidsfactoren zullen in het algemeen verschillend zijn en afhangen van de vorm der toestandslijn tussen intreedlijn en het punt (H_L, H_R) d.i. LR.

Indien dit punt niet te ver van de oorsprong ligt, zal het verschil dikwijls niet groot zijn. Stellen wij ze onderling gelijk, dan wordt zowel de afstand $L_1\,L_2$ als de afstand $R_1\,R_2$:

$$a\,d\,O$$

waarbij a van de vorm van de toestandslijn tussen intreedlijn en LR afhankelijk blijft.

In zulke gevallen zal de lus $L_2\,R_2$ veelal, behalve dan dat zij een afstand $a\,d\,O$ hoger ligt dan de lus $L_1\,R_1$, in bijna niets van de lus $L_1\,R_1$ verschillen. Voor de inducties B_1 en B_2 der door de beide beschouwde toestandslijnen voorgestelde toestanden zal dan gelden:

$$B_2 - B_1 = a\,d\,O\,.$$

Wij beschouwen nu nog een andere variatie van een toestandslijn. Daartoe beschouwen wij eerst in het algemeen de toestandslijnen van twee toestanden L en R, die toegevoegd zijn. Hun toestandslijnen vallen samen van de intreedlijn tot het punt (H_L, H_R). Vanaf dit punt loopt de toestandslijn van L verder verticaal, die van R verder horizontaal en wel tot het eind.

Als H_L en H_R slechts een infinitesimaal bedrag verschillen, (wij stellen dit dH) is de toevoegende lus een rechte, waarvan de helling (die wij b stellen en die gelijk zal zijn aan de reversibele permeabiliteit) in het algemeen van de vorm van het gemeenschappelijk deel der toestandslijnen afhankelijk zal zijn. Wij beschouwen de toestandslijn van R als een variant op de toestandslijn van L. Bij deze wijze van variëren vindt men blijkbaar

$$B_R - B_L = b\, d\, H \ .$$

Heeft men nu twee toestandslijnen, die vanaf de intreedlijn een eindweegs samengaan, doch verderop niet of niet overal samengaan, dan kan men de ene lijn altijd in de andere overvoeren door (oneindig veel) vervormingen van de beide genoemde soorten. De grootheden a en b moeten daarbij voor iedere vervormde toestandslijn, die daarbij optreedt, bekend zijn, wil men daarbij in staat zijn de verandering van B, die met deze vervorming gepaard gaat, te berekenen.

Een zeer grote vereenvoudiging wordt verkregen als men aanneemt, dat a voor een infinitesimaal oppervlakte element in het toestandslijnendiagram slechts van de coördinaten H_R en H_L van dit element afhangt (en dus niet van het deel van de toestandslijn tussen $V^{\text{I}}\,V$ en het element). In dezelfde gedachtengang past het ook aan te nemen, dat b voor een infinitesimaal driehoekje op de eerste deellijn slechts van de coördinaten van dit elementje (die daar gelijk te stellen zijn) afhangt.

Voert men (zulk een model aannemende) een eerste toestand met $H = H_1$, $B = B_1$ en een toestandslijn t_1 over in een tweede toestand met $H = H_2$, $B = B_2$ en een toestandslijn t_2, dan moet gelden:

$$B_2 = B_1 + \int a\, d\, o + \int_{H_1}^{H_2} b\, d\, H \, .$$

De eerste integraal is daarbij uit te strekken over alle oppervlakte-elementen do, die tussen de toestandslijnen t_1 en t_2 en de eerste deellijn liggen. Ligt daarbij een element do in het gebied, dat aan die zijde van t_1 ligt waar $V\,V$ ligt, dan is do positief in rekening te brengen; ligt het aan de andere zijde van t_1, dan moet het negatief in rekening worden gebracht.

De integratie van de grootheid b, die volgens de veronderstelling alleen een functie van H zal kunnen zijn, behoeft geen nadere toelichting.

Kiest men voor de eerste toestand de maagdelijke toestand, dan is $H_1 = 0$, $B_1 = 0$ en is t_1 de lijn $O - V^1 V$. Uitgaande van deze toestand kan volgens het bovenstaande B voor elke andere toestand berekend worden als a en b bekend zijn.

Zet men de grootte van a boven elk element in een derde dimensie loodrecht op het element uit, dan ontstaat een oppervlak, dat wij de „hysteresisheuvel" kunnen noemen. Deze heuvel moet symmetrisch zijn ten opzichte van een vlak door O loodrecht op $V^1 V^1 - V V$.

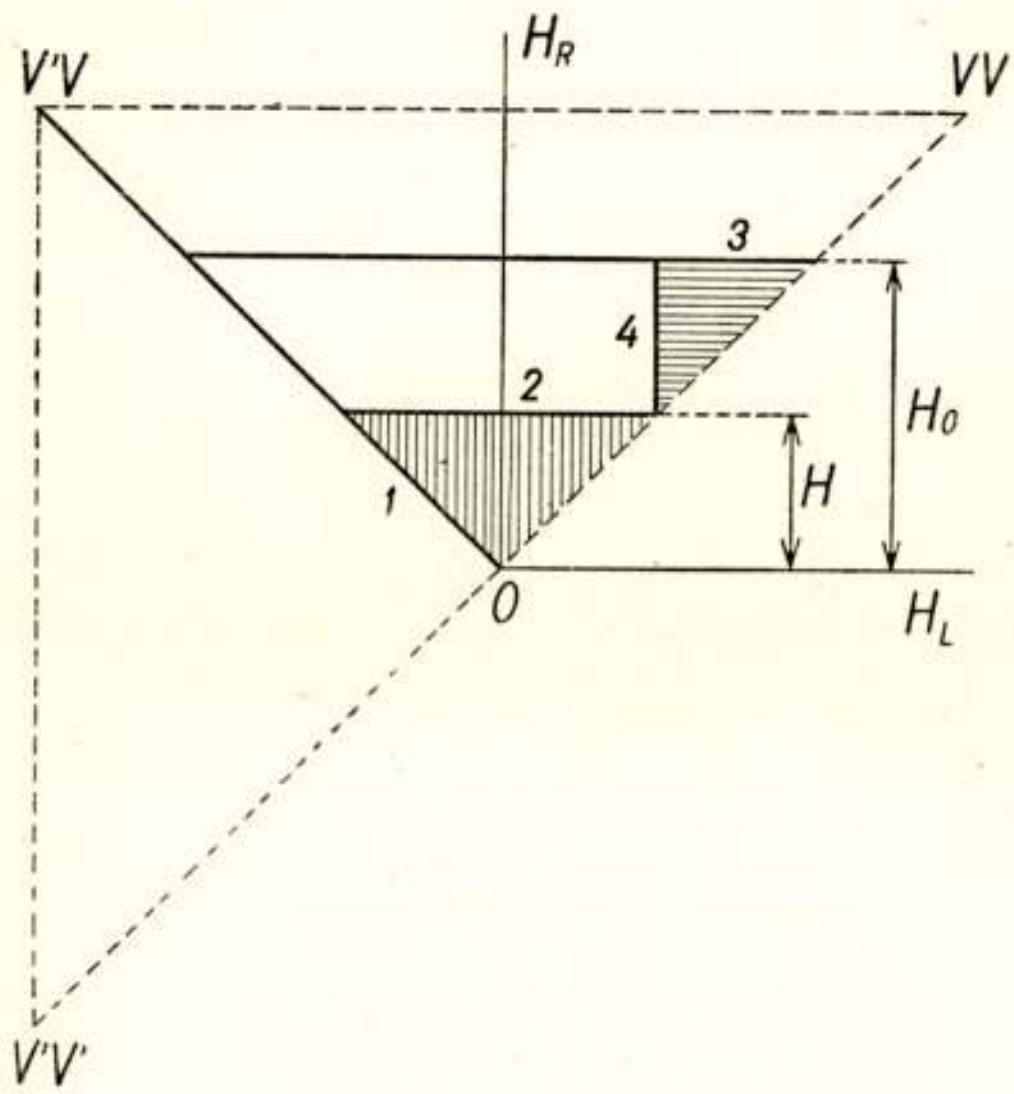


Fig. 8

13. *Toepassingen.*

Eenvoudigheidshalve willen wij eens veronderstellen, dat de grootheid b nul is en de grootheid a onafhankelijk van enige toestandslijn in het gehele toestandsveld constant is.

Daar wij weten, dat in de maagdelijke toestand de inductie nul is, kunnen wij van deze uitgaande de inductie berekenen, die door magnetisering optreedt. De toestandslijn, die eerst onder 45° liep (zie 1 in fig. 8) zal na opvoeren van de veldsterkte tot H een horizontaal stuk van de lengte 2 H verkregen hebben (2 in fig. 8). Dit sluit met de oorspronkelijke toestandslijn een oppervlak H^2 in, zodat wij vinden

$$B = a H^2$$

voor de vergelijking van de normale magnetiseringskromme. Men bedenke steeds, dat men zich bij iedere verandering van H opnieuw moet afvragen, wat de toestandslijn van de hierdoor ontstane toestand is.

Nu zetten wij de magnetisering voort tot $H = H_0$ en gaan dan H weer verminderen. Nu moeten wij de vergelijking van de dalende tak van een commuteringslus vinden. Het eerst horizontale einde (3 in fig. 8) der toestandslijn bij $H = H_0$ krijgt nu een verticaal lijntje (4 in fig. 8) tot afsluiting. Bij een veldsterkte H wordt dit lijntje $H_0 - H$ lang, zodat het oppervlak van het driehoekje tussen de nieuwe en de vergelijkingstoestandslijn $\frac{1}{2} a (H_0 - H)^2$ bedraagt. De gezochte vergelijking wordt dus

$$B = a H_0^2 - \tfrac{1}{2} a (H_0 - H)^2$$

en deze is geldig tot $H = - H_0$.

Men ziet, dat de hantering zeer eenvoudig is. Andere beleggingen van het toestandsveld vereisen alleen wat meer rekenwerk. De belegging moet natuurlijk symmetrisch zijn t.o.v. de deellijn van het tweede kwadrant, zoals reeds aan het slot van punt 12 werd opgemerkt.

Kiest men de belegging in het tweede kwadrant relatief laag of bijna overal (behalve vlak bij de oorsprong) nul, eventueel door de intreedlijn ver in te stulpen, dan verkrijgt men modellen voor de eigenaardige hysteresisverschijnselen, die men vindt bij materialen, opgebouwd uit hoog remanente en weke materialen naast elkaar.

14. *Linearisering bij magnetische dragers.*

In figuur 9 is zeer schematisch een inrichting aangegeven, waarmee trillingen vastgelegd kunnen worden op een ferromagnetische band. De band $P\,Q$ schuift daarbij met constante snelheid onder de luchtspleet in een magnetisch juk J door. Het juk J draagt een niet getekende wikkeling, die in de luchtspleet een magnetisch veld opwekt. Dit veld beïnvloedt het ferromagnetisch materiaal van de drager. Bij A is het veld het sterkst, bij B heeft het slechts een relatief zeer geringe sterkte.

Aangenomen wordt, dat de stroom, die het juk bekrachtigt en de op te tekenen trillingen voorstelt, in de tijd, waarin de drager over een afstand $A\,B$ opschuift, betrekkelijk weinig verandert. Verder wordt verondersteld, dat het juk behalve door

de genoemde stroom ook nog door een relatief hoogfrequente stroom bekrachtigd wordt. In de tijd, waarin de drager over een afstand $A\,B$ opschuift, moge een groot aantal perioden van de hoogfrequente stroom vallen [4]).

Het door het juk in de drager opgewekte veld hange lineair van de beide bekrachtigingen af.

Nu wordt aangenomen, dat het hoogfrequente veld bij A in amplitude gelijk is aan de veldsterkte H_v, waardoor het dragermateriaal in één der met de vertakkingspunten overeenkomende toestanden wordt gebracht. De grootste amplitude van het veld in A, veroorzaakt door het op te tekenen sein, moge kleiner zijn dan de amplitude der hoogfrequente trilling. Is in A de momentele veldsterkte veroorzaakt door het op te tekenen sein H, dan wisselt de veldsterkte in A met de hoge

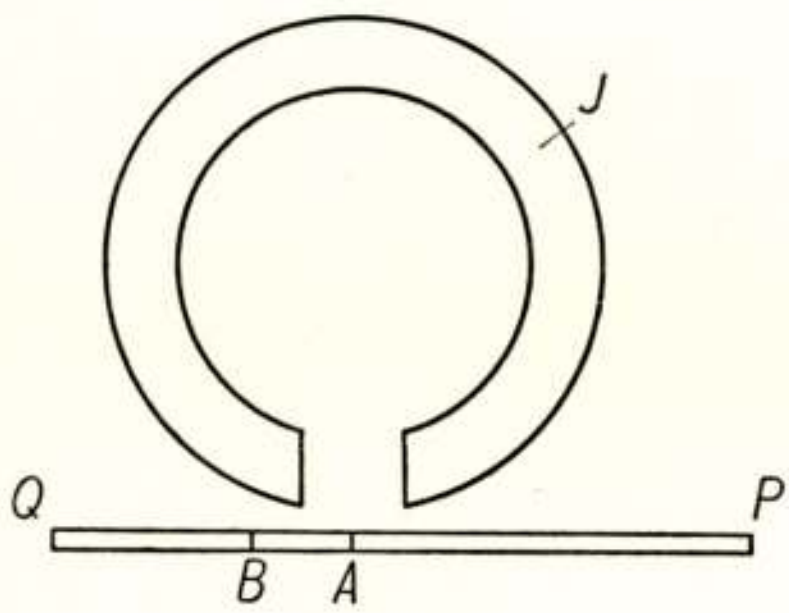


Fig. 9.

frequentie tussen $H + H_v$ en $H - H_v$. Bij zulk een wisseling wordt een toevoegende lus in het B-H-diagram beschreven, waarvan het beeldpunt in het toestandslijnendiagram gelegen is op de lijn $R\,S$ in fig. 10 en wel op een afstand $H\sqrt{2}$ van het punt $V'\,V$.

Dit geldt voor een elementje ferromagnetisch materiaal, dat zich in A (fig. 9) bevindt. Dit schuift evenwel door de beweging van de drager op naar B. Als in de tijd, nodig voor de beweging van A naar B, het laagfrequent sein niet noemenswaardig van momentele waarde veranderd is, zal het materiaal, dat van A naar B beweegt, geleidelijk aan onttrokken worden aan de invloed van genoemde momentele waarde en de invloed van het hoogfrequente veld.

Daar deze invloeden dan echter strikt evenredig verminderen,

[4]) J. W. Gratian, The Journal of the Acoustical Soc. of Am. **21** (1949) 74. Ook Duits octrooischrift 743411.

doorloopt het materiaal nu een reeks toevoegende lussen, waarvan de beeldpunten op de lijn $T\,O$ in fig. 10 liggen. Is het materiaalelement in B aangekomen, dan is het beeldpunt der momenteel doorlopen toevoegende lus in O aangekomen.

Het deel van de lijn $T\,O$, dat binnen het toestandsveld ligt, is dus de toestandslijn van de ferromagnetische toestand, waarin het beschouwde materiaalelement gebracht is en voorlopig zal blijven.

Nemen wij thans aan, dat de eigenschappen van het ferro-

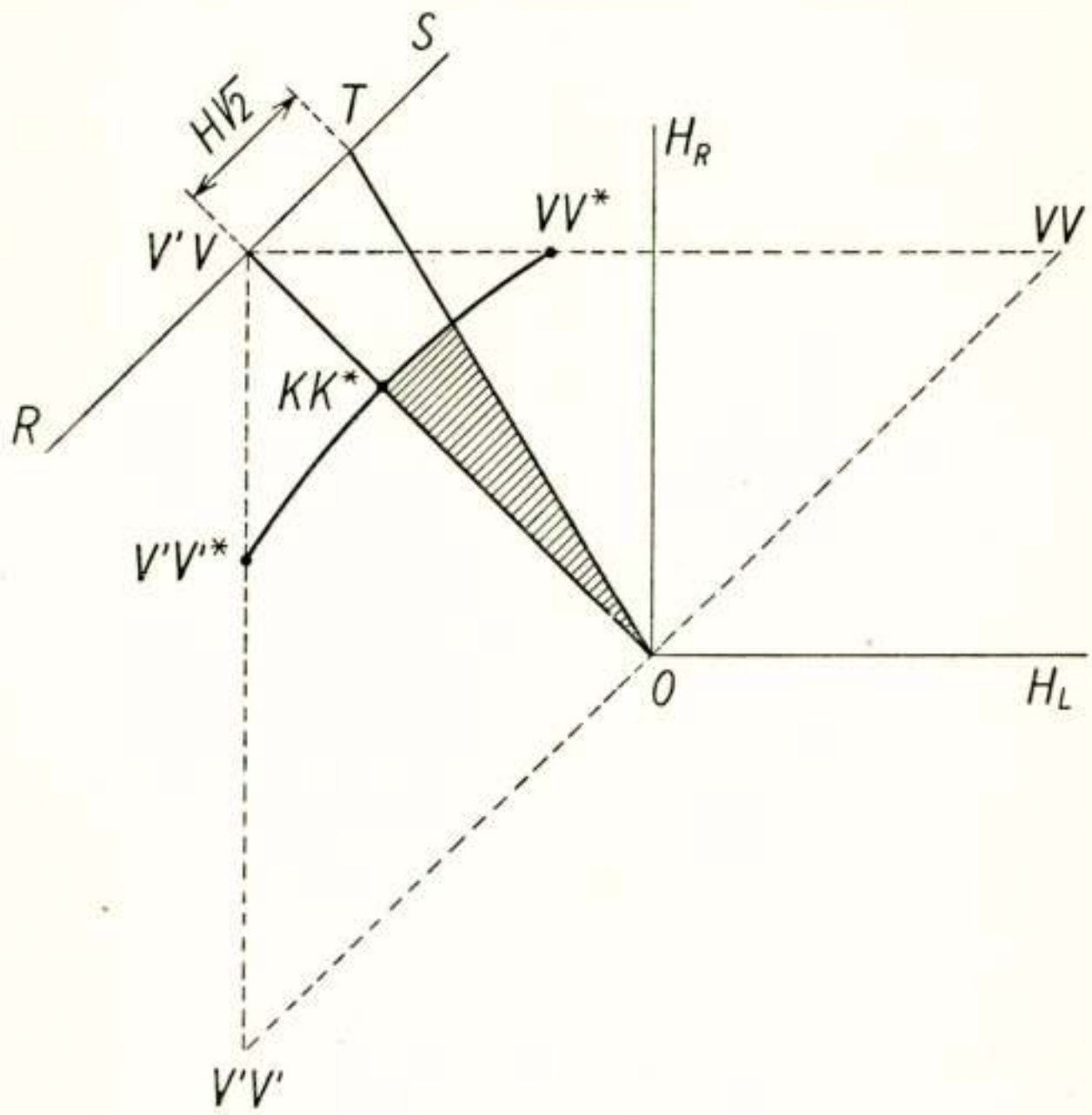


Fig. 10.

magnetisch materiaal door een hysteresisheuvel kan worden voorgesteld, dan is het duidelijk, dat de inductie B van de toestand bepaald wordt door de inhoud van de hysteresisheuvel boven het geharceerde gebied in het toestandsveld. Als deze inhoud steeds evenredig is met de afstand van T tot $V^1\,V$, bestaat volmaakte lineariteit bij de optekening. Aan deze voorwaarde zal ongeveer zijn voldaan, wanneer de hysteresisheuvel ter plaatse tennaastebij door een cylinder met as evenwijdig aan $V^1\,V^1 - V\,V$ begrensd wordt. Noodzakelijk is dit laatste echter niet. Het is voldoende als de projectie van een doorsnede van de heuvel, die door O gaat en loodrecht op het toestands-

veld staat, op het symmetrievlak van de heuvel constant is.

Men ziet, dat het bestaan van een intreedlijn, dus van geconjugeerde punten op de grenslus in principe gunstig schijnt. Ook ziet men, dat, als een intreedlijn bestaat, het hoogfrequentieveld wat zwakker kan worden genomen zonder dat er veel verandert.

Wanneer de hoge frequentie niet zéér hoog is, zal de lijn TO in figuur 10 kunnen moeten worden vervangen door een fijnere of grovere trapjeskromme. Het is duidelijk, dat, zolang de trapjes niet zeer grof worden, bij een geschikt gekozen materiaal toch een behoorlijk lineaire werking verwacht kan worden.

Het schijnt niet ondenkbaar, dat het vinden van geschikt ferromagnetisch dragermateriaal vergemakkelijkt kan worden door onderzoekingen omtrent de gedaante van een eventuele hysteresisheuvel bij verschillende ferromagnetica.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Berekening van de schakeltijd van een multi-vibrator

door H. de Lange Dzn

SUMMARY

In the mathematical introduction a general form is derived for the solution of a linear differential equation of the *n th* order with constant coefficients from the well-known method of variation of parameters, in wich a discontinuity of the *n th* order is reduced to one of zero-order, during integration. This eliminates the determination of the integration constants, if the circuit is in a state of rest before the source of disturbance functions.

In the second part the time lag of a multivibrator is calculated with the aid of a fourth order differential equation with constant coëfficients, using the form mentioned above under practical conditions.

The short period, during which the two tubes simultaneously draw anode current, is $K\frac{4\,C_{ak}}{S}$ seconds. K is a factor wich changes from 5 to 10 by changing the gain per stage from 3 to 100 and the relation of both time constants in each of the two filters from 10 to 100.

1. *Mathematische inleiding.*

I. 1. Alvorens tot behandeling van bovengenoemd electronisch probleem over te gaan, hetwelk aanleiding geeft tot het oplossen van een 4e orde differentiaalvergelijking met constante coëfficienten, zullen we de oplossing, verkregen door toepassing van de bekende methode van variatie van constanten van Lagrange, aan een nadere beschouwing onderwerpen teneinde een inzicht te verkrijgen in de physische betekenis van de diverse hierbij optredende grootheden.

Daartoe worden allereerst de voorwaarden, waaronder de oplossing van de 1e orde differentiaal vergelijking met constante coëfficient zonder meer mag worden toegepast, nader onderzocht. Vervolgens wordt de oplossing van de lineaire differentiaalvergelijking van hoger orde met constante coëfficienten in een meer direct toepasbare vorm gebracht.

I. 2. *Lineaire differentiaal vergelijking 1e orde.*

Van de verkorte lineaire differentiaal vergelijking

$$Ty' + y = 0 \quad (T = \text{constant}) \tag{1}$$

is, zoals bekend, de oplossing

$$y = C e^{rt} \qquad r = -\frac{1}{T} \tag{2}$$

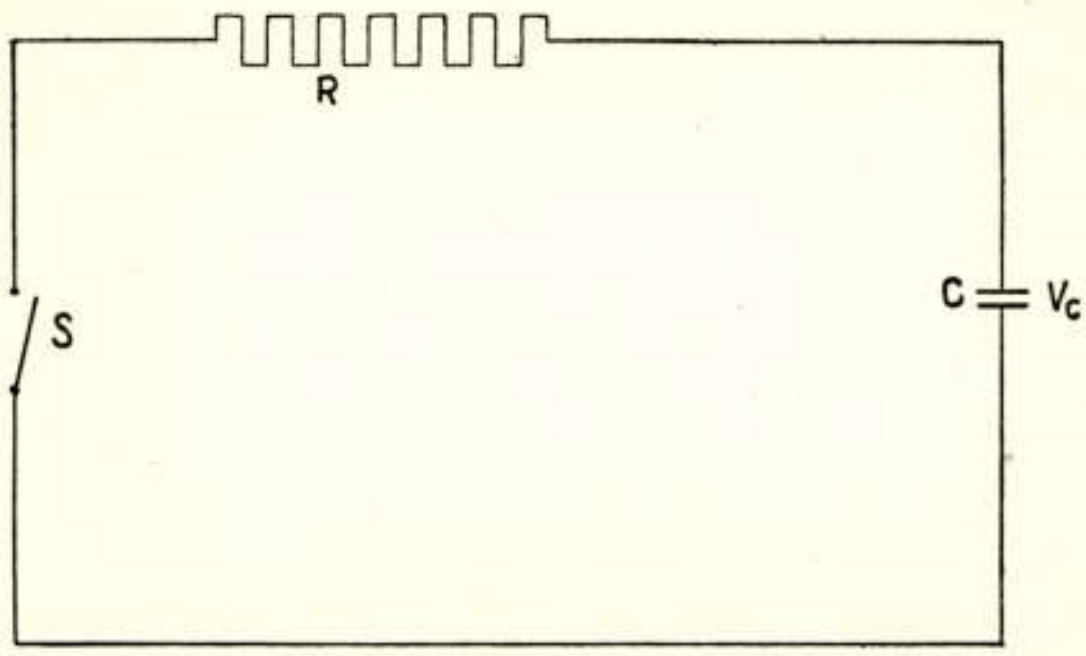


Fig. 1.

Deze oplossing toegepast op het condensatorcircuit van fig. 1 leidt tot

$$V_c = V_c(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{3}$$

indien op het tijdstip $t = 0$ de condensator geladen is tot de spanning $V_c(0)$ en de schakelaar S wordt gesloten. Het systeem is in zichzelf gesloten en als oplossing verschijnt, inhearent aan het lineaire systeem, een e macht.

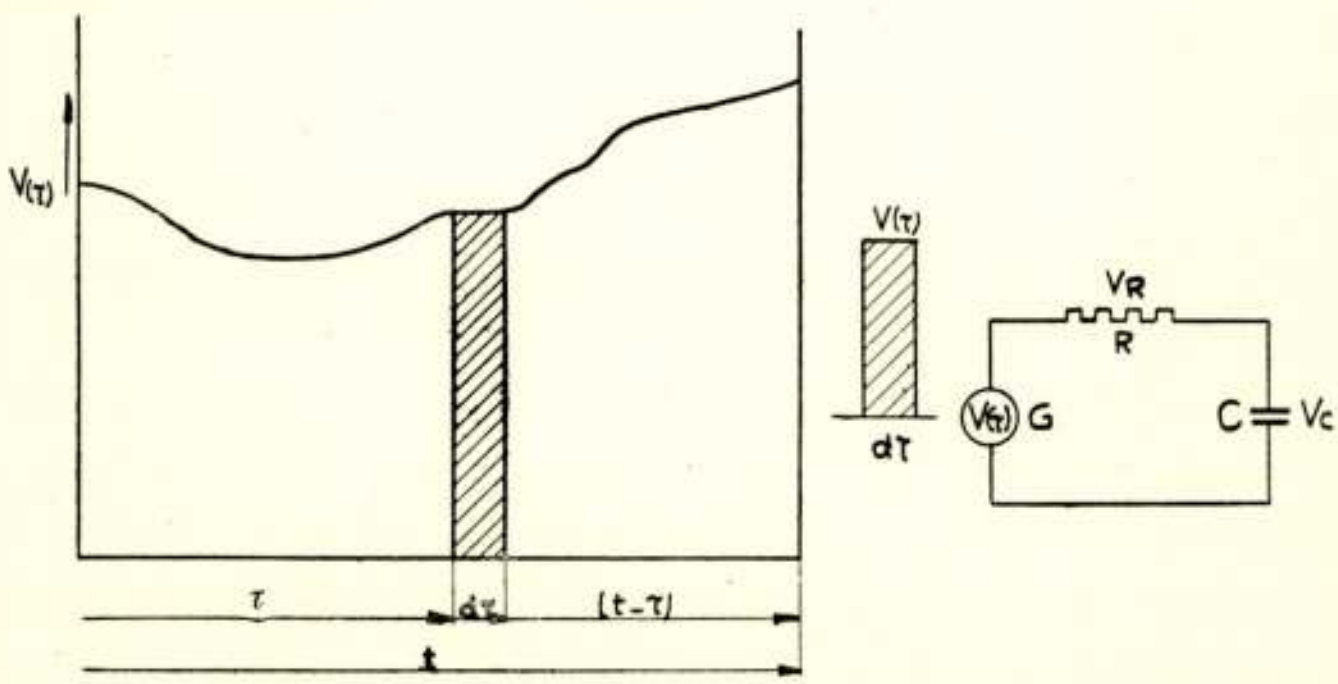


Fig. 2.

Veronderstellen we vervolgens, dat op het systeem een uit-

wendige storing werkzaam is, doordat generator G in fig. 2 op het tijdstip τ een eenmalige impuls opwekt ter hoogte $V(\tau)$ en van de tijdsduur $d\tau$, dan verandert V_c mede door deze oorzaak met de tijd.

Achtereenvolgens de spanning $V_{(\tau)}$, V_R en V_c in ogenschouw nemende, ziet het beeld eruit als weergegeven in fig. 3.

Hieruit blijkt, dat gedurende de korte aanwezigheid van $V(\tau)$ de spanning op de weerstand een vermindering ondergaat, welke vermindering door de condensator als $d\,V_c(\tau)$ wordt verzameld.

Tijdens het interval $\tau\,(d\,\tau)$ vloeit er een stroom $i = V(\tau)/R$ naar de condensator, waardoor deze wordt opgeladen tot de spanning:

$$d\,V_c(\tau) = \frac{i\,d\,\tau}{C} = \frac{V(\tau)}{R} \cdot \frac{d\,\tau}{C} = \frac{V(\tau)}{T}\,d\,\tau$$

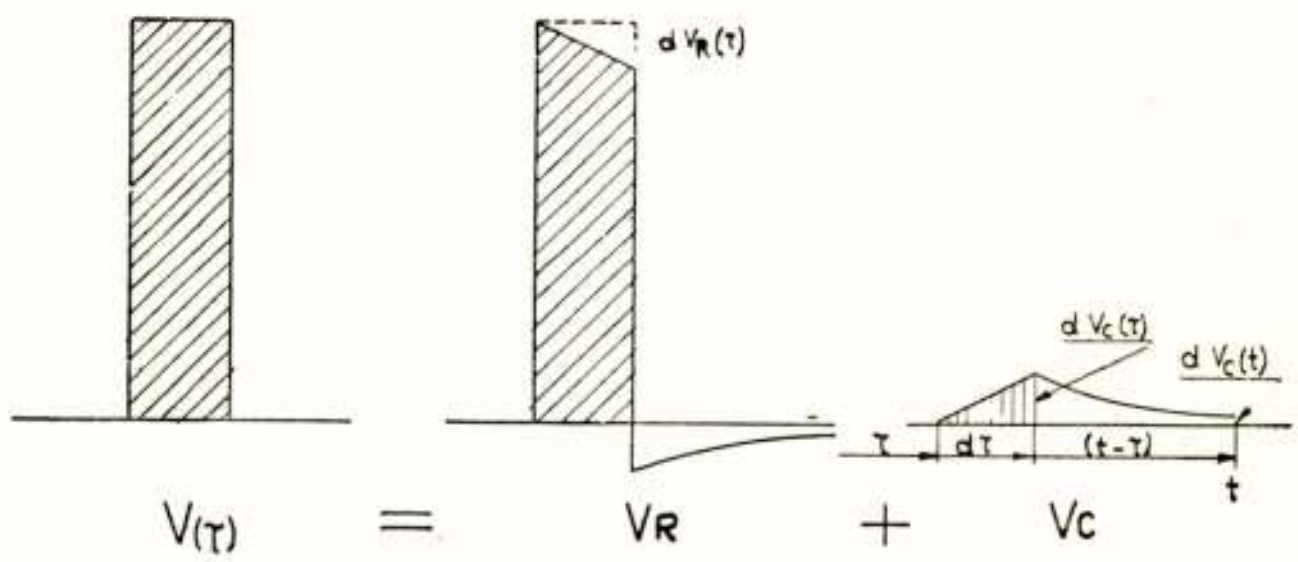


Fig. 3.

Wordt $V(\tau)$ wederom nul, dan is het systeem aan zichzelf overgelaten, zodat $d\,V_c(\tau)$ volgens een e-macht wordt gewijzigd, waardoor $(t-\tau)$ *sec.* nà het einde van het interval $\tau\,(d\,\tau)$

$$d\,V_c(t) = \frac{V(\tau)}{T}\,d\,\tau\,e^{r(t-\tau)}$$

Wekt de generator een continue spanning $V(\tau)$ op, dan is het duidelijk dat, indien deze werkzaam is van $0 \rightarrow t$, de condensatorspanning gevonden wordt als som van kleine op- en ontladingen, telkens met als resultaat een $d\,V_c(t)$ van de opeenvolgende aansluitende impulsen, waaruit men zich het continu verloop van $V(\tau)$ tussen 0 en t opgebouwd kan denken, zodat als resultaat van deze sommatie verschijnt

$$V_c = \int_0^t \frac{V(\tau)}{T}\,e^{r(t-\tau)}\,d\,\tau \qquad (4)$$

We merken hierbij het volgende op:

Voor $t < 0$ was $V_c = 0$. Het resultaat V_c op het tijdstip t kan dus alleen het gevolg zijn van wat er tussen 0 en t is geschied. Uitkomst (4) is dus de volledige oplossing voor het geval:

Waardebepaling van V_c op het willekeurige tijdstip t, ten gevolge van het inschakelen van een spanning van willekeurig continu verloop op het tijdstip $t = 0$,

1e mits deze sommatie is geoorloofd, d.w.z. de wet van superpositie geldt, dus het systeem lineair is voor het amplitude gebied van stroom en spanning.

2e De sommatie is ook geoorloofd als $V(\tau)$ een sprong vertoont. Dit ligt in het procédé van in- en uitschakelen van $V(\tau)$ opgesloten, echter de uitkomst van de integraal, bepaald volgens de bekende regel van bepaald integreren

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = F(b) - F(a)$$

waarbij

$$\int f(x) = F(x) + C$$

is alleen dàn juist, als genoemde discontinuïteit uitsluitend in de grenzen 0 en t optreedt. Is dit niet het geval, dan blijft de regel gelden als men het integreren in afzonderlijke integralen, elk met tijdsgrenzen van de ene tot de volgende discontinuïteit, splitst.

3e $V(\tau)$ is echter slechts een deel van de integrand. In deze vorm geschreven de bekende invloedsfunctie van Green. In feite integreren we echter fracties van $\frac{\text{lading}}{\text{capaciteit}}$, waarvan elk oneindig klein moet zijn; d.w.z. in het algemeen moet de integrand $\psi(t, \tau)\, d\, \tau$, voor $0 \leqq \tau \leqq t$, tot nul naderen als men $d\, \tau$ willekeurig klein kiest. Is dit voor $\tau = 0$ niet het geval, dan is er een eenvoudig middel om uit deze impasse van zuiver mathematische oorsprong te komen (zie hieronder).

4e is $V(\tau) = V \sin \omega\, t$ en verleggen we het tijdstip van inschakelen naar $-\infty$, dan wordt door de sommatie van e-machten als stationnaire oplossing wederom een sinusfunctie van $\omega\, t$ gevonden, mits R positief is. Dan openbaart zich de sommatie van e-machten uitsluitend in een fasehoek φ. Is R echter negatief, dan verdwijnt in de uitkomst de e-macht niet.

Bovengenoemd geval kan ook met de methode van Lagrange worden opgelost en verloopt dan als volgt:

Van de differentiaalvergelijking

$$V_c' + \frac{1}{T} V_c = \frac{V(t)}{T}$$

lost men het linker lid gelijk 0 gesteld op. Dan is de integraal hiervan volgens (1)

$$V_c = C e^{rt} \qquad r = -1/T$$

Lagrange stelt nu C een functie van de tijd en stelt hierbij de voorwaarde dat dan V_c een oplossing moet zijn van de dif. vergl. met 2e lid. De geniale gedachtengang, die hieraan ten grondslag ligt, werd door het voorafgaande voorbeeld naar voren gebracht. Blijkbaar wordt ook op deze wijze de response van het circuit op de impuls gevonden. Door invulling in de dif. vergl. volgt dat

$$C' e^{rt} = \frac{V(t)}{T}$$

moet zijn, zodat

$$C = \int^{t} \frac{V(t)}{T} e^{-rt} dt + K$$

De volledige oplossing luidt

$$V_c = \left\{ \int^{t} \frac{V(t)}{T} e^{-rt} dt + K \right\} e^{rt} \tag{5}$$

Vangt $V(t)$ op het tijdstip $t = 0$ *zonder sprong* aan zijn invloed op het systeem uit te oefenen, dan geldt, omdat de condensator ongeladen is, voor

$$t \leqq 0 \qquad \begin{array}{l} V(t) = 0 \\ V_c = 0 \end{array}$$

Dit in (5) ingevuld geeft

$$V_c(0) = \int^{0} \frac{V(t)}{T} e^{-rt} dt + K = 0$$

zodat

$$K = -\int^{0} \frac{V(t)}{T} e^{-rt} dt$$

en is (5) dus te schrijven als

$$V_c = \left\{ \int_0^t \frac{Vt}{T} e^{-rt} dt \right\} e^{rt} \tag{6}$$

zijnde de volledige oplossing als $V(t)$ zonder sprong aanvangt. Nu is ook als $V(t)$ voor $t = 0$ een sprong maakt (discontinuïteit van orde nul) $\int_0^\delta V(t)\, dt = 0$ als we δ tot nul laten naderen. De e-macht in de integrand wijzigt deze eigenschap niet. Een product van twee functies die op hetzelfde tijdstip een sprong vertonen, is weer een sprong op hetzelfde tijdstip, zodat de integraal van (6) genomen tussen de grenzen 0 en $0 + \delta$ voor $\delta \to 0$ eveneens nul oplevert. Hieruit volgt dat ook met sprong voor $t = 0$ (6) de juiste waarde geeft voor $V_c(0)$ en dus de volledige oplossing is van het geval; evenals vergl. (4), welke slechts een andere schrijfwijze is voor (6), waardoor echter de impulswerkwijze eerst goed naar voren komt.

Passen we Lagrange echter toe op de differentiaalvergelijking voor de spanning op de weerstand

$$V'_R + \frac{1}{T} V_r = V'(t)$$

dan wordt

$$V_R = \left\{ \int^t V'(t)\, e^{-rt} dt + K \right\} e^{rt}$$

Vertoont $V(t)$ nu reeds een eindige sprong voor $t = 0$, dan wordt $V'(t)$ op datzelfde moment een impuls ter hoogte ∞ en ter breedte 0, dus van *eindige* waarde, d. w. z. een discontinuïteit van 1e orde. Thans moet, als we δ tot nul naderen,

$$V_R(\delta) = \left\{ \int^\delta V'(t)\, e^{-rt} dt + K \right\} e^{r\delta} \neq 0$$

zijn. We stellen nu

$$K = -\int^0 V'(t)\, e^{-rt} dt + K_0$$

Hiermede wordt

$$V_R = \left\{ \int_0^t V'(t)\, e^{-rt} dt + K_0 \right\} e^{rt}$$

Dat thans K_0 verschijnt, wordt veroorzaakt door een zodanig verloop van de integrand, dat aan de onder ten 3e genoemde voorwaarde voor $t = 0$ niet wordt voldaan. Hierdoor leidt de

regel van bepaald integreren tot een onjuiste uitkomst, welke door K_0 gecorrigeerd moet worden.

Toevoeging van K_0 is dus alleen op zuiver mathematische gronden nodig en het is in meerdere opzichten van belang deze constante door een mathematische kunstgreep te doen verdwijnen.

We kunnen nl. de knik bij H van V (0) in fig. 4 laten verdwijnen door toevoeging van

$$-V(0)e^{at}$$

en na het integreren deze knik weer aanbrengen door $a = -\infty$ te stellen.

Hierdoor wordt, ten behoeve van het integreren, de orde van de discontinuïteit van de integrand tijdelijk tot orde nul teruggebracht, waarmede aan het onder ten 2e gestelde wordt voldaan.

De volledige oplossing wordt dan gereduceerd tot

$$V_R = \int_0^t \{V'(\tau) - aV(0)e^{a\tau}\} e^{r(t-\tau)}\, d\tau \qquad (7)$$
$$a = -\infty$$

voor het inschakelen van $V(t)$ ten tijde $t = 0$ bij ongeladen condensator.

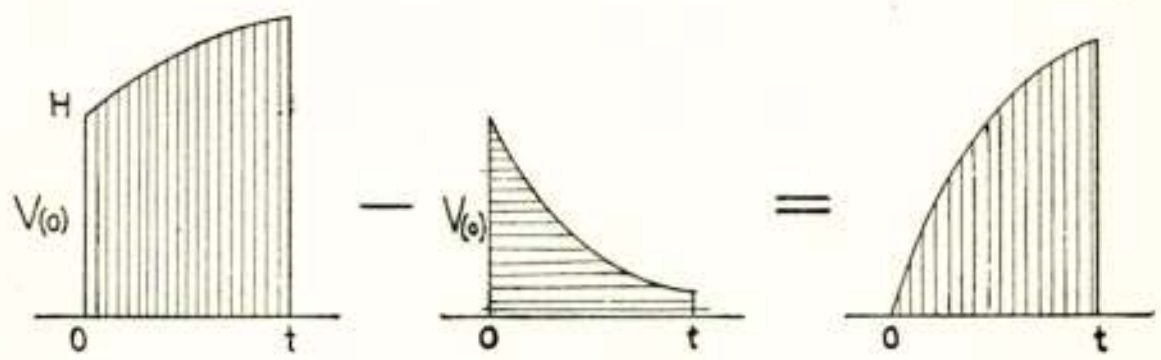


Fig. 4.

I. 3. *Lagrange toegepast op n^{de} orde differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten.*

We veronderstellen dat van de karakteristieke vergelijking, behorende bij de differentiaalvergelijking

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t) \qquad (8)$$

de wortels r_1 tot r_n ongelijk zijn.

De methode der variatie van constanten, bijv. toegepast voor $n = 3$, zij volledigheidshalve in het kort weergegeven.

Van de verkorte differentiaalvergelijking is de algemene oplossing

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t} \qquad (9)$$

De constanten wederom als functie van de tijd gesteld en in vergelijking (8) ingevuld levert

$$
\begin{array}{lllllll}
a_3 y = & a_3\{ & C_1 e^{r_1 t} + & C_2 e^{r_2 t} + & C_3 e^{r_3 t}\} & & \\
a_2 y' = & a_2\{ & r_1 C_1 e^{r_1 t} + & r_2 C_2 e^{r_2 t} + & r_3 C_3 e^{r_3 t}\} & + a_2[& C'_1 e^{r_1 t} + C'_2 e^{r_2 t} + C'_3 e^{r_3 t} = 0] \quad (a) \\
a_1 y'' = & a_1\{ & r_1^2 C_1 e^{r_1 t} + & r_2^2 C_2 e^{r_2 t} + & r_3^2 C_3 e^{r_3 t}\} & + a_1[& r_1 C'_1 e^{r_1 t} + r_2 C'_2 e^{r_2 t} + r_3 C'_3 e^{r_3 t} = 0] \quad (b) \\
y''' = & & r_1^3 C_1 e^{r_1 t} + & r_2^3 C_2 e^{r_2 t} + & r_3^3 C_3 e^{r_3 t} & + & r_1^2 C'_1 e^{r_1 t} + r_2^2 C'_2 e^{r_2 t} + r_3^2 C'_3 e^{r_3 t} \\
\hline
f(t) = & & 0 \quad + & 0 \quad + & 0 & + & r_1^2 C'_1 e^{r_1 t} + r_2^2 C'_2 e^{r_2 t} + r_3^2 C'_3 e^{r_3 t} \quad (c)
\end{array}
$$

De vormen tussen de haken worden telkens nul gesteld. Het geheel opgeteld levert dan, omdat de 3 particuliere oplossingen elk aan de differentiaalvergelijking zonder 2e lid voldoen, kolom voor kolom nul op, zodat vergl. (c) als derde vergelijking in C'_p wordt gevonden.

C'_1 uit (b) met (a) en (c) met (b) geëlimineerd geeft

$$(r_2 - r_1)\, C'_2\, e^{r_2 t} + (r_3 - r_1)\, C'_3\, e^{r_3 t} = 0$$

$$r_2 (r_2 - r_1)\, C'_2\, e^{r_2 t} + r_3 (r_3 - r_1)\, C'_3\, e^{r_3 t} = f(t)$$

waarmede na eliminatie van C'_2 tenslotte wordt gevonden

$$(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)\, C'_3\, e^{r_3 t} = f(t)$$

of

$$C_3 = \int \frac{f(t)\, e^{-r_3 t}\, dt}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} + K_3$$

C_2 en C_1 zijn door cyclische verwisseling uit C_3 af te leiden. Deze waarden van C_p ingevuld in (9) geeft als totale oplossing voor $n = 3$

$$y = \left\{ \int \frac{f(t)\, e^{-r_1 t}\, dt}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} + K_1 \right\} e^{r_1 t} + \left\{ \int \frac{f(t)\, e^{-r_2 t}\, dt}{(r_2 - r_3)(r_2 - r_1)} + K_2 \right\} e^{r_2 t} +$$

$$+ \left\{ \int \frac{f(t)\, e^{-r_3 t}\, dt}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} + K_3 \right\} e^{r_3 t}$$

Veronderstellen we thans dat $f(t)$ optreedt vanaf het tijdstip $t = 0$, terwijl voor $t < 0$ elke vorm van energie *in* het systeem, welke zijn invloed op de betrokken grootheid zou kunnen uitoefenen ontbreekt, dan volgt uit dit voorbeeld, mede in verband met het voorgaande, dat in het algemeen voor de

n^{de} orde differentiaalvergelijking van het systeem, het verloop van de betrokken grootheid wordt bepaald door

$$y = \sum_{p=1}^{p=n} \int_{t}^{0} \frac{f(\tau)\, e^{r_p (t-\tau)}\, d\tau}{\prod_{q=1}^{q=n} (r_p - r_{q \neq p})} \tag{10}$$

zijnde een som van n integralen elk met als noemer het gedurig product van de $(n-1)$ *verschillen van* r_p *met de overige r's.*

Blijkbaar is elke integrand het bij de eigentrilling r_p behorende gedeelte van de response van het systeem op het tijdstip t van de impuls $P_i(\tau)\,(d\tau)$ ten tijde τ, als $P_i(\tau)$ de functie aan de ingang van het systeem is.

Bij het $R.C.$circuit in I. 2 bijv. was $P_i(\tau) = V(\tau)$ en $f(\tau)$ resp. $\frac{V(\tau)}{T}$ en $V'(\tau)$.

*V*ergelijking (10) is voorts alleen dan de volledige oplossing als $f(0) = 0$ of een discontinuïteit is van de 0de orde en overigens $f(\tau)$ tot t geen discontinuïteit heeft.

In het algemeen echter is

$$f(\tau) = \sum_{0}^{n} b_p \frac{d^{n-p}}{d\tau^{n-p}} P_i(\tau) \tag{11}$$

welke gewoonlijk niet aan de orde-voorwaarde van de discontinuïteit voldoet. Dat hangt er van af hoe $P_i(\tau)$ voor $\tau = 0$ uit uit de nullijn verrijst. Dit kan in een practisch geval ten hoogste zijn een eindige sprong, of de 1e afgeleide $(p = n-1)$ vertoont een sprong of eerst een der volgende afgeleiden vertoont een sprong. Overeenkomstig de werkwijze bij V_R, waardoor in (7) de orde van de discontinuïteit van $V'(\tau)$ van 1 op 0 wordt teruggebracht door toevoeging van $-a\,V(0)\,e^{a\tau}$ kan, indien door sprongsgewijze aanvang

$$\frac{d^n P_i(0)}{d\tau^n}$$

een discontinuïteit is van orde n, deze tot orde nul worden teruggebracht door toevoeging van

$$-\frac{d^{n-1} P_i(0)}{d\tau^{n-1}} \cdot a\, e^{a\tau}$$

zodat, ten behoeve van het integreren, aan $f(\tau)$ volgens (11) totaal moet worden toegevoegd:

$$\boxed{\varphi(\tau) = -\left[\sum_{0}^{n-1} b_p \frac{d^{n-(p+1)}}{d\tau^{n-(p+1)}} P_i(0)\right] a\, e^{a\tau}} \tag{12}$$

waarmede (10) overgaat in

$$\boxed{y = \sum_{p=1}^{p=n} \int_{0}^{t} \frac{\{f(\tau) + \varphi(\tau)\} e^{r_p(t-\tau)}\, d\tau}{\prod_{q=1}^{q=n} (r_p - r_{q \neq p})}} \tag{13}$$

$a = -\infty$

Bestaat het electrische circuit uit een serieschakeling van m gelijke filters, elk gescheiden door een buis waardoor geen terugwerking van het volgende op één der voorafgaande filters aanwezig is, dan krijgt men voor de uitgangsspanning van het m de filter een m-voudige integraal of wat op hetzelfde neerkomt, men bepaalt met (13) de uitgangsspanning van het 1e filter en beschouwt deze uitkomst als ingangsspanning voor het volgende, enz.

Met de toevoeging van $\varphi(\tau)$ is het samengestelde karakter van de integratie constanten verdwenen en heeft men het volgende bereikt:

1e Elke integraal, bepaald volgens de regel van bepaald integreren, geeft direct de juiste uitkomst voor $a = -\infty$.

2e Is voor $t < 0$ het systeem *niet* in rust, dan hebben K_1 tot K_n uitsluitend de physische betekenis gekregen op de betrokken plaats in het systeem de resten voor te stellen op het tijdstip $t = 0$ van de gebeurtenissen, die voor $t < 0$ reeds hebben plaats gevonden en die voor $t > 0$ vervolgens verlopen volgens

$$\sum_{1}^{n} K_p e^{r_p t}$$

3e Is het systeem voor $t < 0$ in rust, dan worden ook K_1 tot $K_n = 0$.

Is bijvoorbeeld $P_{(i)}$ reeds werkzaam van $0 \rightarrow t_1$ en worden er op dit tijdstip één of meer elementen van het systeem plotse-

ling op een andere waarde gebracht dan luidt de volledige oplossing na t_1, de tijd hierna t' genoemd en τ variërende tussen o en t'

$$y = \sum_{1}^{n}\left[K_p e^{r_p t'} + \int_{0}^{t'} \frac{\{f(t_1+\tau) + \varphi(t_1+\tau)\} e^{r_p(t'-\tau)} d\tau}{\prod_{q=1}^{q=n} (r_p - r_{q \neq p})}\right] \qquad (14)$$

K_1 tot K_n vertegenwoordigen, door toevoeging van $\varphi(t_1+\tau)$, weer uitsluitend de resten van het uitschakelen van P_i op het tijdstip t_1, welke vervolgens onder de gewijzigde omstandigheden worden gevarieerd, terwijl de som der 2e termen het resultaat is van het wederom inschakelen van P_i met gewijzigde r_p's.

II. *Toepassing van de vergelijkingen I (12) en (13) bij het berekenen van de schakeltijd van een multi-vibrator.*

Fig. 5a geeft het blokschema van een multi-vibrator, bestaande uit een twee-traps-weerstandsversterker, waarvan in- en uitgang met elkaar zijn verbonden als V_0 wordt kortgesloten. Fig. 5b

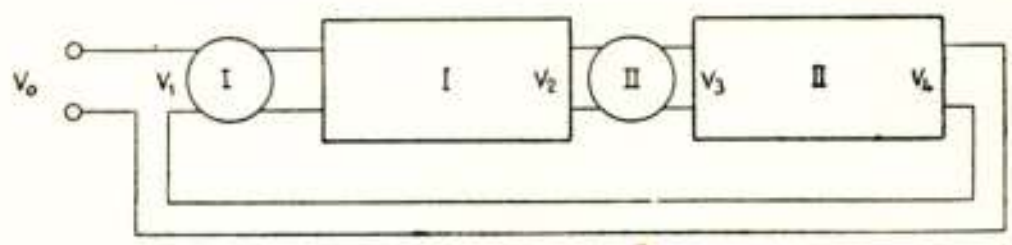


Fig. 5a.

is het schema van de beide koppelfilters I en II. Dit bestaat uit de weerstand R_p als parallelschakeling van de inwendige weerstand R_i van de voorafgaande buis met de anodeweerstand R_a met eraan parallel de anode-kathode-capaciteit $C_{ak} = C_2$,

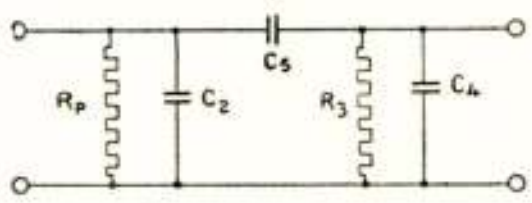


Fig. 5b.

voorts de koppelcondensator C_5 in serie met de lekweerstand R_3 parallel aan de ingangscapaciteit $C_{gk} = C_4$ van de volgende buis.

Verondersteld zij, dat vanaf het moment dat buis I stroom voert, door het optreden van roosterstroom de roosterspanning van deze buis de waarde nul aanneemt. We veronderstellen voorts, dat binnen de roosterstroom V_r de karakteristiek van beide buizen recht is met een gemiddelde steilheid S. Over R_p van

filter I komt dan een spanningsval van hoogstens $-S V_r R_p$, waardoor C_5 over R_3 en C_4 wordt opgeladen, zodat over R_3 in de aanvang een spanning ontstaat

$$V_2 \approx -S V_r R_p \frac{C_5}{C_4 + C_5} < -V_r$$

Hierdoor is buis II stroomloos, zodat het opladen van C_5 van filter I geschiedt alsof de rest van het circuit niet aanwezig is.

$V_2 = f(t)$ wordt dus gevonden door op de ingang van het filter de stroomsprong $-S V_r$ te plaatsen.

De differentiaalvergelijking van het systeem geldende voor de periode dat $|V_2| > V_r$ is dus gelijk aan die van het filter en luidt

$$V_2'' + \frac{1}{T_1}\left(1 + \frac{\beta}{m}\right) V_2' + \frac{1}{T_1 T_2} = -\frac{\eta}{T_1} V_1' \qquad (1a)$$

waarin

$$\left.\begin{array}{ll}
T_1 = R_p\left(C_2 + \dfrac{C_4 C_5}{C_4 + C_5}\right) = R_p C_p & \eta = S R_p \times \dfrac{C_5}{C_4 + C_5} = \eta_1 \times \eta_2 \\[2ex]
T_2 = R_3 (C_4 + C_5) & V_1 = V_r (1 - e^{a t}) \\
 & \text{voor } a = -\infty \\[2ex]
m = \dfrac{T_2}{T_1} & \left(1 + \dfrac{\beta}{m}\right) = b \\[2ex]
\beta = \dfrac{(C_2 + C_5)(C_4 + C_5)}{C_2 C_4 + C_2 C_5 + C_4 C_5} & \dfrac{\beta}{m} = \dfrac{R_3 (C_2 + C_5)}{R_p (C_4 + C_5)}
\end{array}\right\} \quad (1b)$$

Met gebruikmaking van I (13) voor $n = 2$ luidt de oplossing

$$V_2 = -\frac{\eta V_r}{T_1} \times \frac{e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}}{\gamma_1 - \gamma_2} \qquad (2)$$

$$\begin{matrix}\gamma_1 \\ \gamma_2\end{matrix} = \frac{-b}{2 T_1}\left\{1 \pm \sqrt{1 - 4/b^2 m}\right\} \qquad (3)$$

We veronderstellen nu, min of meer overeenkomende met practische omstandigheden, dat

$$m \geqq 10 \qquad \text{en} \qquad C_5 = C_4 = 2 C_2 \qquad (4)$$

In dat geval wordt

$$\beta = 1{,}5 \qquad \text{en} \qquad 1 < b < 1{,}15$$

waarmede in het ongunstigste geval ($m = 10$) de noemer van (2)

$$-T_1 (\gamma_1 - \gamma_2) = 1{,}15 \sqrt{1 - 4/13{,}2} = 0{,}96$$

dus $4^0/_0$ van de eenheid verschilt. Naarmate echter $m > 10$ is, nadert zowel de noemer als b steeds meer tot 1, terwijl bovendien met steeds grotere benadering

$$\gamma_1 = -\frac{b}{T_1} \qquad \text{en} \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{m\,T_1\,b} \tag{5}$$

gesteld kunnen worden.

De voorwaarde $m \geqq 10$ brengt dus mede, dat in absolute zin

$$\gamma_1 > 10\,\gamma_2$$

zodat V_2 volgens (2) in de aanvang snel stijgt tot $\approx \eta\, V_r$ en $e^{\gamma_1 t}$ reeds lang is uitgewerkt als V_2 vervolgens onder invloed van $e^{\gamma_2 t}$, tot V_r is gedaald.

Bij het naderen van V_2 tot V_r geldt dus met grote benadering onder voorwaarde (4) dat

$$V_2 = -\eta\, V_r\, e^{\gamma_2 t} \tag{6}$$

$V_2 = f(t)$ volgens (2) wordt weergegeven door de lijn *abcdf* in fig. 6. Bij *c* zou op het tijdstip t_0 buis II volgens *c d f* opengaan,

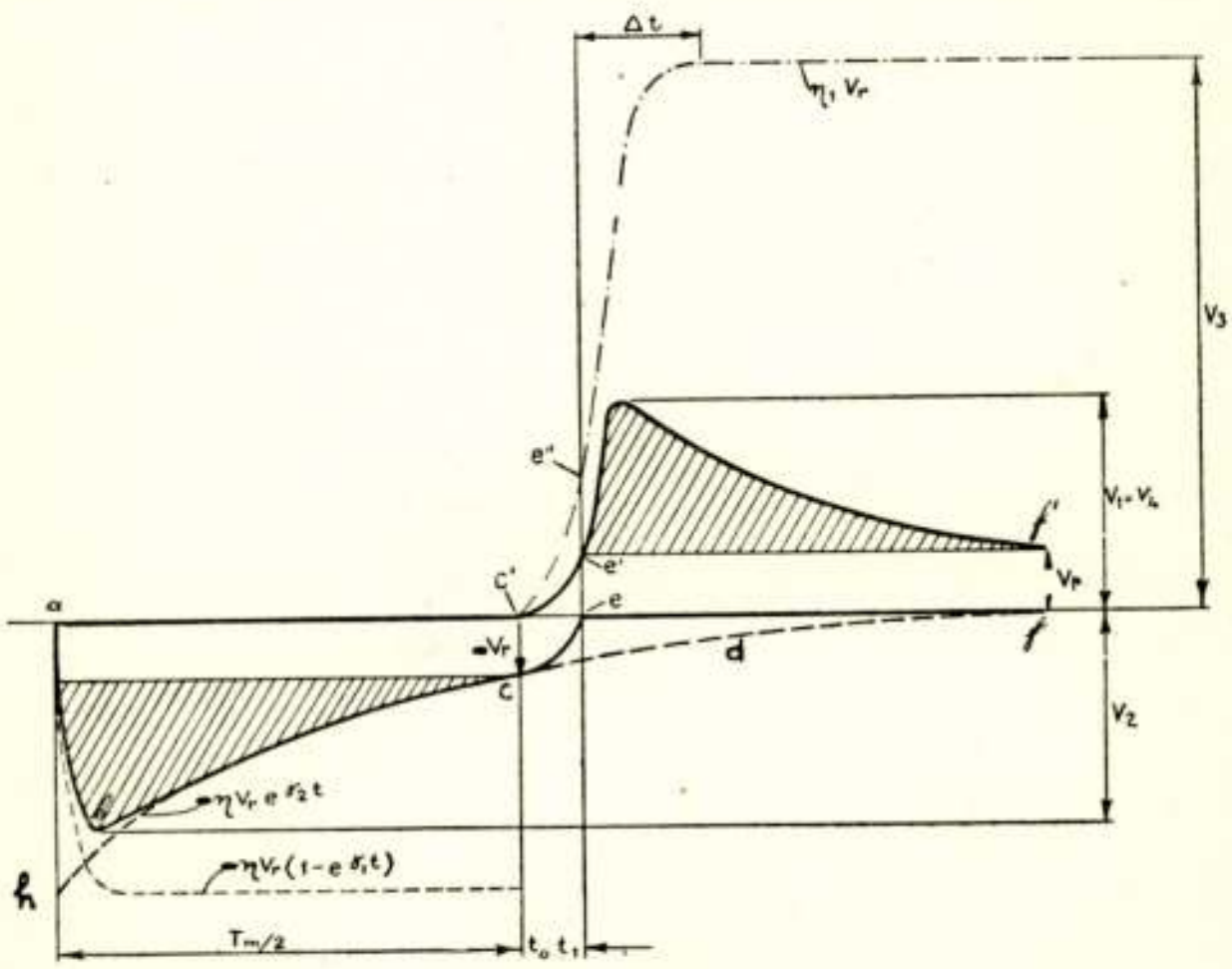


Fig. 6.

ware het niet dat ook op dit moment buis I nog stroom voert. Hierdoor wordt de roosterspanningsvariatie volgens *c d f*, eenmaal het totale circuit rondgaande, versterkt doorgegeven met als resultaat dat de lijn *ce* wordt beschreven.

Tegelijk met het doorlopen van de roosterruimte van buis II volgens *ce*, wordt de roosterruimte van buis I in tegenge-

stelde richting doorlopen, hetgeen wordt weergegeven door $c'\,e'$, voor de duidelijkheid boven de nullijn weergegeven. Op het tijdstip t_1 begint er bij e roosterstroom in buis II te vloeien, waardoor de roosterspanning V_2 verder nul blijft, terwijl tevens op het tijdstip t_1, in de anode van buis II, de spanning V_3 op R_p van filter II reeds is aangegroeid tot

$$V(t_1) = \frac{1}{\eta_2} V_r$$

weergegeven door punt e''. De uitgangsspanning $V_4 = V_1$ van filter II is van e' tot f' in absolute zin groter dan V_r, zodat gedurende deze periode buis I stroomloos is, waardoor de terugkoppeling wederom is afgesloten. Het opladen van de condensator C_2 parallel aan R_p van filter II tot $\eta_1 V_r$ vindt vervolgens plaats volgens

$$V_3 = \{\eta_1 V_r - V(t_1)\}\{1 - e^{\gamma_1 t}\}$$

hetgeen practisch, met γ_1 volgens (5)

$$\boxed{\triangle t = 2{,}5\, T_1} \tag{8}$$

sec. duurt.

De periode $a\,b\,c$ is, afgezien van $t_0\,t_1$, de halve trillingstijd van de multivibrator, welke gevonden wordt, uit de tijdsduur, welke V_2 volgens (6) nodig heeft om langs de gestippelde kromme $h\,c\,d\,f$ in fig. 6 te dalen tot $-V_r$. Hieruit volgt, met γ_2 volgens (5),

$$\boxed{T_m = 2\,b\,T_2\,lg\,\eta} \tag{9}$$

Rest ons nog de tijd $t_0\,t_1$, dat beide buizen open zijn, te berekenen.

De roosterspanning van buis I is volgens fig. 5a tijdens deze fase

$$V_1 = V_0 + V_4 \tag{10}$$

Nemen we punt c in fig. 6 als nulpunt van tijd en amplitude dan wijzigt de vergelijking van de spanning $c\,d\,f$, welke we ons thans aan de ingangsklemmen als uitwendige spanning V_0 geschakeld denken, terwijl voorts beide filters voor $t = 0$ in de toestand van rust kunnen worden beschouwd, in

$$V_0 = V_r(1 - e^{\gamma_2 t}) \tag{11}$$

Voor beide filters in serie geldt

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{b}{T_1}\frac{d}{dt} + \frac{1}{m\,T_1^2}\right)^2 V_4 = \frac{\eta^2}{T_1^2}\frac{d^2 V_1}{dt^2} \tag{12}$$

V_1 volgens (10) ingevuld levert als karakteristieke vergelijking van (12)

$$\left(r^2 - \frac{\eta - b}{T_1} r + \frac{1}{m\,T_1^2}\right)\left(r^2 + \frac{\eta + b}{T_1} r + \frac{1}{m\,T_1^2}\right) = 0 \qquad (13)$$

terwijl bij de 4e orde differentiaalvergelijking van het geheel als 2e lid fungeert, met $\varphi(\tau)$ volgens I (12),

$$\left(\frac{\eta}{T_1}\right)^2 V_0'' = f(\tau) + \varphi(\tau) = -\frac{\eta^2}{T_1^2} V_r \left\{\gamma_2^2 e^{\gamma_2 \tau} - \gamma_2\, a\, e^{a\tau}\right\}$$
$$a = -\infty$$

Met I (13) voor $n = 4$ wordt

$$\frac{V_4}{V_r} = -\frac{\eta^2}{T_1^2}\left[\frac{\int_0^t \left\{\gamma_2^2 e^{\gamma_2 \tau} - \gamma_2\, a\, e^{a\tau}\right\} e^{r_1 (t-\tau)}\, d\tau}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)(r_1 - r_4)} + \text{enz.}\right]$$

Hetgeen na uitwerking wordt

$$\frac{V_4}{V_r} = e^{\gamma_2 t} + \frac{r_2 - \gamma_2}{2\,(r_1 - r_2)} e^{r_1 t} + \frac{r_1 - \gamma_2}{2\,(r_2 - r_1)} e^{r_2 t} + \frac{r_4 - \gamma_2}{2\,(r_3 - r_4)} e^{r_3 t} + \frac{r_3 - \gamma_2}{2\,(r_4 - r_3)} e^{r_4 t}, \qquad (14)$$

onder gebruikmaking van het volgende stel vergelijkingen volgende uit (13) en (3).

$$\left.\begin{aligned}
r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= 2\,(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{2\,b}{T_1} && r_1 r_2 = r_3 r_4 = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{1}{m\,T_1^2} \\
&= \frac{\eta - b}{2\,T_1}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{(\eta - b)^2 m}}\right\} \approx \frac{\eta - b}{T_1} && (r_1 - r_3)(r_1 - r_4) = \frac{2\,\eta}{T_1} r_1 \\
& \approx \frac{1}{(\eta - b)\, m\, T_1} && (r_2 - r_3)(r_2 - r_4) = \frac{2\,\eta}{T_1} r_2 \\
&= -\frac{\eta + b}{2\,T_1}\left\{1 \pm \sqrt{-1\,\frac{4}{(\eta + b)^2 m}}\right\} \approx -\frac{\eta + b}{T_1} && (r_3 - r_1)(r_3 - r_2) = -\frac{2\,\eta}{T_1} r_3 \\
& \approx \frac{1}{(\eta + b)\, m\, T_1} && (r_4 - r_1)(r_4 - r_2) = -\frac{2\,\eta}{T_1} r_4 \\
&= -\frac{b}{2\,T_1}\left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{b^2 m}}\right\} \approx -\frac{b}{T_1} && (\gamma_2 - r_1)(\gamma_2 - r_2) = -\frac{\eta}{T_1} \gamma_2 \\
& \approx -\frac{1}{b\, m\, T_1} && (\gamma_2 - r_3)(\gamma_2 - r_4) = \frac{\eta}{T_1} \gamma_2
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Volgens (10) en (11) is de totale roosterspanning aan de ingang van het systeem

$$V_1 = V_r (1 - e^{\gamma_2 t}) + V_4$$

welke in de tijd t_1 tot V_r moet zijn aangegroeid, zodat tenslotte voor t_1 geldt

$$\frac{r_2 + \gamma_2}{r_1 - r_2} e^{r_1 t_1} - \frac{r_1 + \gamma_2}{r_1 - r_2} e^{r_2 t_1} - \frac{\gamma_2 - r_4}{r_3 - r_4} e^{-r_3 t_1} - \frac{r_3 - \gamma_2}{r_3 - r_4} e^{-r_4 t_1} = 0 \quad (16)$$

waarbij thans voor alle waarden van

$$r_3 > r_1 > \gamma_2 > r_2 > r_4 \quad (17)$$

de absolute grootte volgens (15) wordt ingevuld.

Door deze grootteverhouding speelt voor de practisch in beschouwing komende waarden voor m en η de 1e e-macht met positieve exponent in (16) de grootste rol, bij de bepaling van t_1. In dezelfde tijd blijft de 2e en 4e e-macht practisch gelijk aan de eenheid terwijl de 3e e-macht met de grootste doch negatieve exponent tot nul nadert, waardoor deze term in zijn geheel kan worden verwaarloosd.

Met deze overweging wordt na verdere uitwerking

$$\boxed{t_0 t_1 = \frac{T_1}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\eta - b} lg (2 - \delta) \frac{\eta - b}{\eta} \{ m b (\eta - b) + 1 \}} \quad (18)$$

waarbij δ voor $\eta = 3$ en $m = 10$ gelijk is aan 0,08 en voor hogere waarden van m en η snel tot nul nadert.

Nu is volgens (1b) en (4)

$$\frac{T_1}{\eta} = \frac{R_p C_p}{S R_p \eta_2} = \frac{C_2 \left(1 + \frac{C_4}{C_5}\right) + C_4}{S} = \frac{4 C_2}{S}$$

Zodat voor snelle omschakeling die buis het gunstigst werkt waarvan deze verhouding zo klein mogelijk is, een voorwaarde welke ook bij breedband-versterkers een rol speelt, hetgeen ook wel duidelijk is als men bedenkt, dat gedurende $t_0 t_1$ beide buizen open zijn en het geheel dus als een breedband-versterker werkt.

De rest van de vorm in (18) noemen we K en heeft de volgende waarden

$m \backslash \eta$	3	4	6	10	20	50	100
10	5,30	5,37	5,60	5.87	6,61	7,15	7,80
100	9,02	8,60	8,42	8,50	8,80	9,47	10,16

Beide buizen voeren dus tegelijk stroom gedurende de tijd

$$t_0 t_1 = K \frac{4\, C_{ak}}{S} \, sec$$

Aan de anode zijde wordt volgens (8) deze schakeltijd nog vermeerderd met

$$\triangle t = \frac{4\, C_{ak}}{S} \, 2{,}5\, \eta \, sec$$

Daarbij is verondersteld, dat de versterking per trap

$$\eta \geqq 3 \, ,$$

de verhouding

$$\frac{T_2}{T_1} \geqq 10 \, ,$$

voorts

$$C_{gk} \approx 2\, C_{ak} \approx C_5 \, ,$$

de gemiddelde steilheid van de $I_a\, V_g$ karakteristiek over de roosterruimte gelijk aan S,

het plotseling optreden van zodanige roosterstroom, dat tijdens max. anodestroom de roosterspanning van de betrokken buis gelijk is aan nul.

Tijdschrift van het Nederlands Radiogenootschap

Radar-antenne-systemen over gelijkmatige bestraling van een oppervlak

door J. R. Huynen

SUMMARY

Some Radar-antenna-systems for uniform illumination of a surface one discusted.

1. Een radar-antenne-reflector heeft tot doel electro-magnetische energie in een bepaalde richting te bundelen. De uitgezonden energie bereikt het doel, wordt teruggekaatst en de teruggezonden energie wordt door dezelfde antenne ontvangen, en omgezet in een lichtend beeld op een opvangscherm.

De tijd, welke verloopt tussen uitgezonden en ontvangen signaal, is een maat voor de afstand van antenne tot doel. De stand van de antenne zelf bepaalt de richting, waarin het doel zich bevindt. We krijgen zodoende in bolcoördinaten een volledige plaatsbepaling van het doel in de ruimte. Het opvangscherm is echter gebonden aan twee dimensies, daardoor moeten we bij één beeld altijd een onderstelling maken over de 3e dimensie. Nemen we bijvoorbeeeld de afstand tot het doel als constant aan, dan krijgen we alle punten van een halve bol geprojecteerd op het scherm; dit is de situatie, als we op de grond de ruimte afzoeken naar een bepaald doel. Zijn twee doelen van gelijke grootte (bijv. twee vliegtuigen), doch op verschillende afstand, dan zal het dichtstbijzijnde vliegtuig het helderste beeld op het opvangscherm geven. Een groter vliegtuig zal echter op grotere afstand hetzelfde lichtpunt geven. Door op een ander scherm de afstand te bepalen, weten we, waarmee we te maken hebben.

2. Om de halve bol af te tasten, moet de antenne bewegen. Op twee manieren kan dit gebeuren: óf met een spiraalvormige beweging, óf met een zig-zag beweging. Wil elk punt van de

halve bol met een gelijke helderheid op het scherm te zien zijn, dan moet per eenheid van ruimtehoek dezelfde hoeveelheid energie worden uitgezonden, of, wat hetzelfde is, de lineaire snelheid van het aftasten langs de bol moet constant zijn. Bij de zigzagbeweging kan hier niet aan worden voldaan. Voor de punten, waar de beweging terugzwiept, is immers de snelheid nul. Op het scherm zullen de randen helderder lijken dan het midden van de projectie van de halve bol.

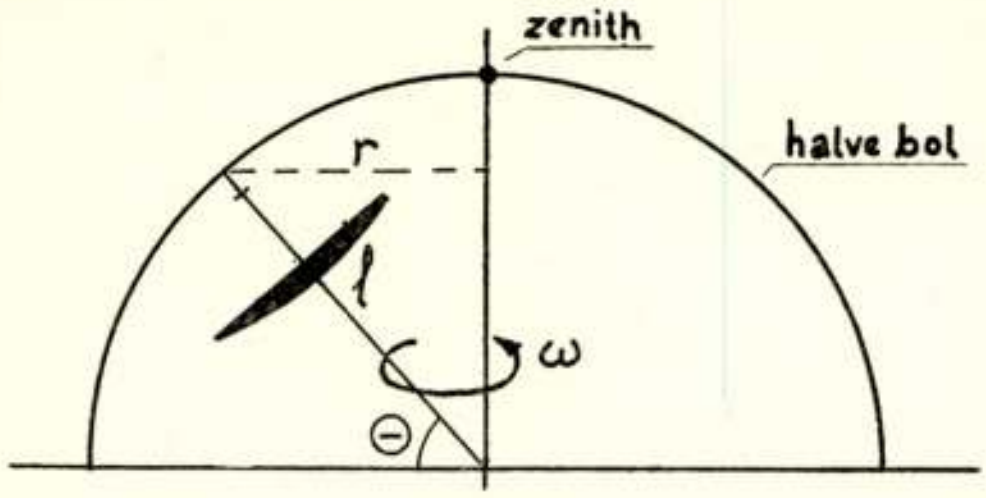


Fig. 1.
Spiraalvormige beweging van parabolische antenne.

De spiraalbeweging levert een betere oplossing. Bij het naderen van het zenith-punt van de halve bol, beschrijven we steeds kleinere cirkels.

De lineaire snelheid bij het doorlopen van de spiraal moet steeds een constante waarde hebben. D.w.z., als de rotatie-snelheid

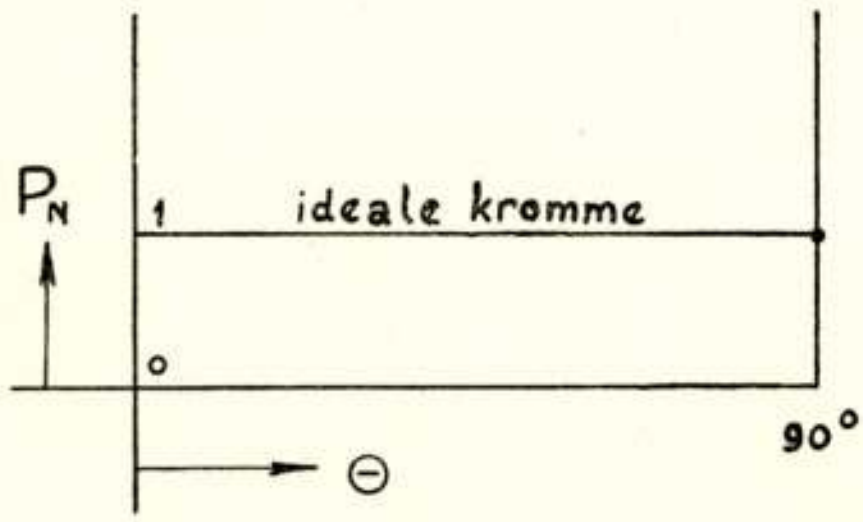


Fig. 2.
Energieverdeling als functie van de elevatie-hoek.

ω rad/sec bedraagt (zie fig. 1), is de lineaire snelheid $V = \omega \, . \, r$. V is constant, zodat

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{V}{l \cos \Theta} = \frac{c}{\cos \Theta} \quad . \tag{1}$$

De bijbehorende energie-kromme, als functie van Θ, zou, voor het gehele bereik Θ van $0 - 90^0$ een constante zijn.

Wij zien onmiddellijk, dat deze ideale toestand niet bereikt kan worden, voor $\Theta = 90^0$ wordt $\omega = \infty$. Het werkelijke verloop van de energie-kromme wordt gegeven in fig. 3. Er moet een compromis worden gezocht in verband met de maximum toelaatbare mechanische versnellingen. De schrijver heeft een berekeningsmethode ontwikkeld, waarmee voor elk systeem met een spiraalbeweging, welke aan de eis van formule 1) moet voldoen, in verband met de maximum toelaatbare versnellingen de meest gunstige energieverdeling wordt bereikt. Deze berekening hier weergeven zou ons te ver voeren. Wij volstaan met op te merken, dat een eenduidige oplossing mogelijk blijkt, als gegeven zijn:

1) de „bundelbreedte" van de gebruikte parabolische antenne,
2) de tijd waarin de spiraal eenmaal wordt doorlopen,
3) de maximum toelaatbare versnelling van het antennesysteem.

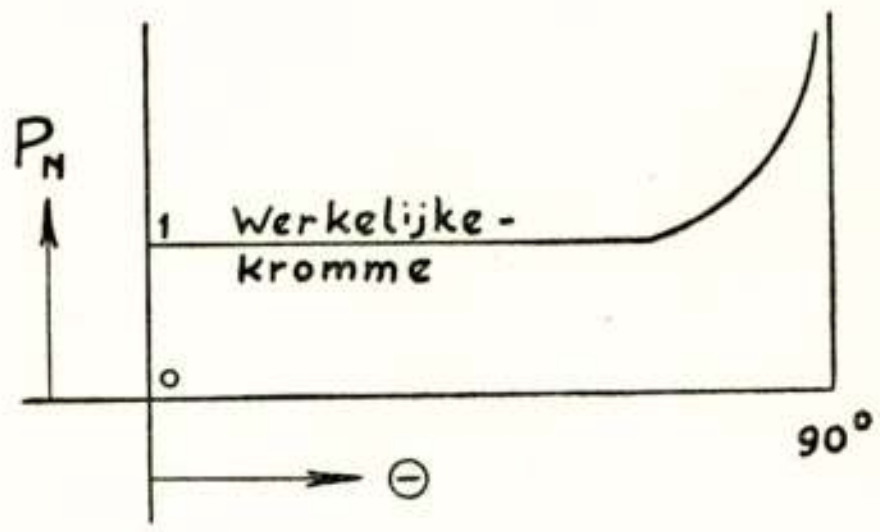


Fig. 3.
Werkelijk verloop der energieverdeling.

3. Behalve het projecteren van een bol in de ruimte, met de radar-antenne in het middelpunt, kunnen ook andere eisen gesteld worden. Bijvoorbeeld, een vliegtuig met een radar-installatie vliegt op zekere hoogte h boven het vlak gedachte aardoppervlak. Gevraagd wordt de projectie van het aardoppervlak op het opvangscherm.

De electromagnetische energie, opgevangen door een doel, op de aarde gelegen onder een hoek Θ (zie fig. 4) met het vliegtuig, zal afhangen van de stralingsintensiteit van de in die richting uitgezonden energie en van de afstand R. Om een gelijke lichtintensiteit op het scherm te krijgen voor het gehele aardoppervlak moet de stralingsenergie, welke de aarde per oppervlakte eenheid bereikt, overal dezelfde zijn. De per oppervlakte-eenheid opgevangen hoeveelheid stralingsenergie is echter omgekeerd evenredig met de afstand tot de stralings-

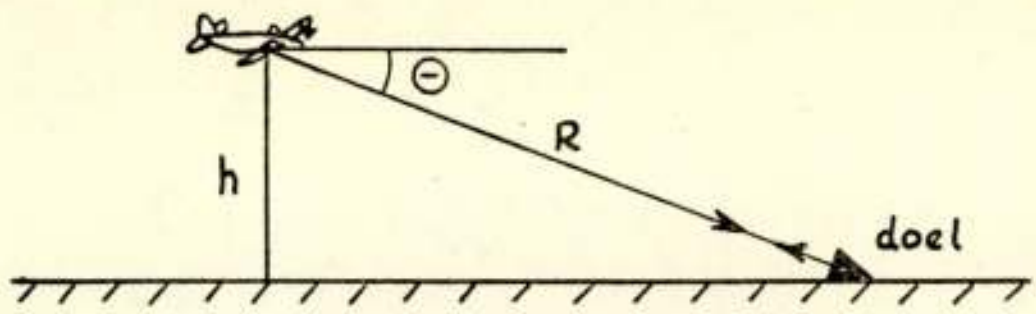
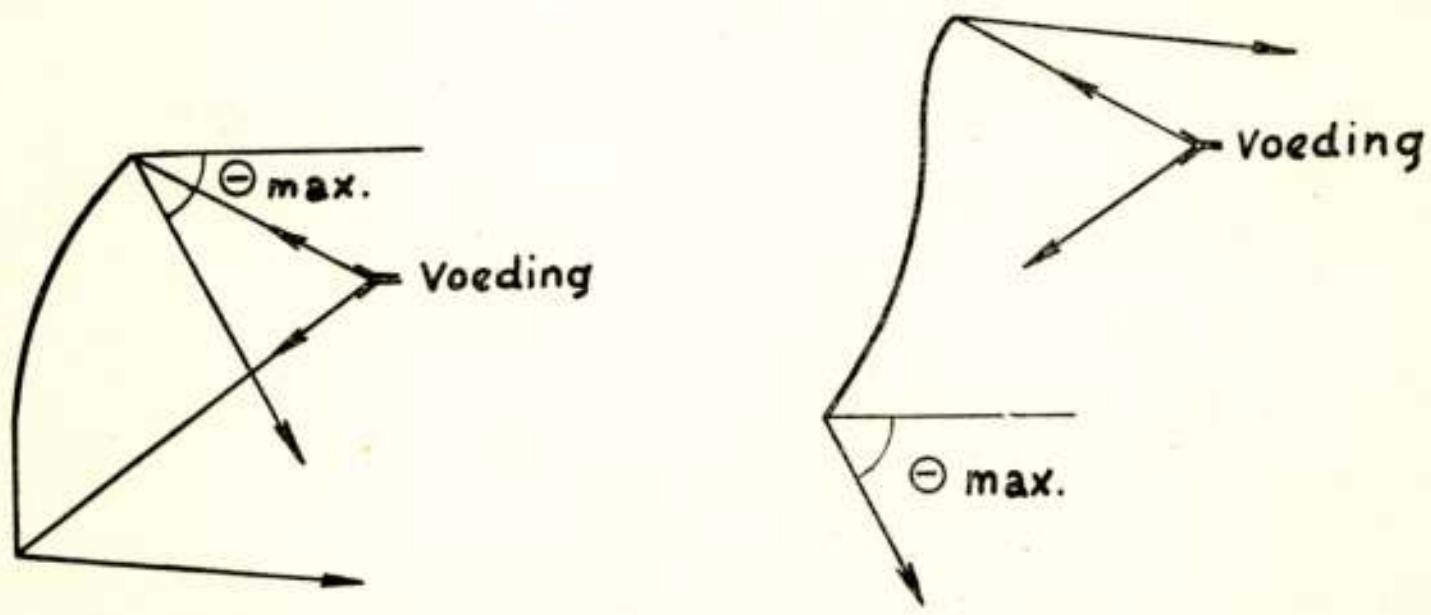


Fig. 4.
Bestraling van een vlakke aarde.

bron in het kwadraat. Voor een constante illuminatie zal de stralingsintensiteit in een gegeven richting (Θ) dus evenredig met R^2 moeten zijn. Noemen we deze energie P_Θ, dan is dus

$$P_\Theta = C R^2 = \frac{C h^2}{\sin^2 \Theta} = a \operatorname{cosec}^2 \Theta \quad (a = \text{constant}) \,. \quad (2)$$

Dit is de fundamentele eis waaraan dergelijke reflectoren moeten voldoen. De bijzondere energieverdeling wordt verkregen door middel van speciaal berekende gekromde reflectoren. Uitgegaan wordt van beschouwingen uit de theorie van de



a. bovenkant geeft straling in $\Theta_{max.}$ richting.

b. benedenkant geeft energie in $\Theta_{max.}$ richting.

Fig. 5.
Gekromde reflectoren voor aardbestraling.

geometrische optica; voor grote reflectoren blijkt deze aanname goed te voldoen. De methode staat in zijn geheel en zeer duidelijk beschreven in: „Microwave antenna theory and design", door S. Silver 1949 (Radiation Laboratory Series) blz. 497—509.

Principieel zijn er twee vormen van deze antennes, en wel een, waarbij de bovenkant de energie in de grootste hoek Θ

uitzendt en de andere, waarbij de benedenkant van de reflector dit doet, zie ook blz. 474 fig. 139 van het werk van Silver.

Inplaats van een gehele gekromde reflector te maken kan ook een parabolische reflector worden gebruikt, waarop een metalen strip wordt aangebracht. De strip dient dan om de gewenste energieverdeling te krijgen. Zie ook de afbeelding bij Silver (blz. 485 fig. 13.19b).

Schrijver heeft verscheidene van deze gekromde reflectoren ontworpen. Als voortzetting op bovenvermelde berekening, welke opgezet is voor de gehele gekromde reflector, blijkt het ook mogelijk alleen de vorm van de correctiestrip te berekenen.

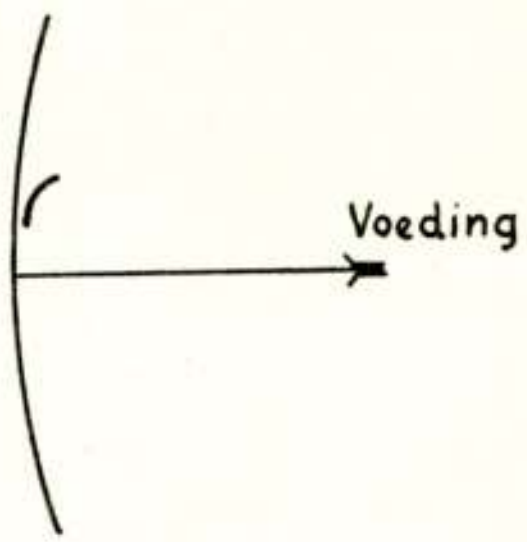


Fig. 6.
Parabolische reflector met $\mathrm{cosec}^2\,\Theta$ strip.

4. Een uitbreiding van de voorgaande theorie wordt verkregen door de kromming van de aarde in de beschouwingen op te nemen. De theorie wordt daardoor aanzienlijk gecompliceerder. Vooral de betrekkelijk eenvoudige numerieke berekeningen ter bepaling van de gekromde reflectoren worden thans onpractisch gecompliceerd. Een benaderingsmethode is door de schrijver ontwikkeld. Het blijkt, dat de correctie voor de gekromde aarde pas van invloed wordt voor zeer grote hoogten (h).

5. We hebben tot nu toe enkele der fundamentele eisen besproken, waaraan diverse radar-systemen moeten voldoen. In het algemeen krijgen we bij de constructie te maken met ingewikkelde mechanische bewegingen, met zeer grote snelheden en versnellingen. Aan de andere kant worden hoge eisen gesteld aan precisie en stabiliteit. Hieruit volgt, dat een belangrijk mechanisch probleem zal zijn, het balanceren van de bewegende reflector. Een interessante balanceringstheorie is hiervan het gevolg. Wij willen dit reserveren voor een latere publicatie.

Verslag van het examen radiotechnicus en monteur

gehouden in April, Mei, Juni en Juli 1950

Het schriftelijk examen radiotechnicus en radiomonteur werd gehouden op 5 en 6 April 1950. Aangemeld hadden zich 151 candidaten voor technicus (waarvan teruggetrokken 2) en 247 voor monteur (waarvan teruggetrokken 7). Wegens onvoldoend schriftelijk examen werden afgewezen 84 candidaten technicus en 83 candidaten monteur. Voor het mondeling gedeelte werden opgeroepen 65 candidaten technicus en 157 candidaten monteur, welk mondeling examen werd gehouden op 5, 6, 14, 15, 19, 20 Juni en 3, 4, 10, 11 Juli.

Afgewezen werden 36 candidaten technicus en 65 candidaten monteur.

Geslaagd zijn in totaal 28 candidaten technicus en 82 candidaten monteur.

1 candidaat technicus en 10 candidaten monteur werden voor een herexamen in aanmerking gebracht. Van de 5 candidaten herexamen monteur slaagden er 3.

Bij dit examen is bij het mondeling gedeelte een afzonderlijk onderzoek ingesteld naar de kennis van en het inzicht in de wis- en natuurkundige grondslagen der radiotechniek en is meer tijd besteed aan het onderzoek der practische vaardigheid en bekwaamheid der candidaten in het uitvoeren van metingen. Deze uitvoeriger wijze van examineren blijft in het vervolg gehandhaafd.

Bij vele candidaten was de vaardigheid in het uitvoeren van gewone, in de practijk voorkomende metingen onvoldoende. Een aantal candidaten had zelfs bijna nooit een behoorlijke meting uitgevoerd. Bij de opleiding moet aan dit onderdeel in het algemeen veel meer aandacht worden geschonken. Zonder een zekere ervaring in dit opzicht is succes op het examen uitgesloten.

Octrooien

Openbaar gemaakt 15 Juli 1950.

O.A. 114837, kl. 21 a^{4}73a. Comp. Générale de T.S.F. Inrichting voor het meten van het electrisch veld en het overgebrachte vermogen in een golfpijp met rechthoekige dwarsdoorsnede, waarbij gebruik wordt gemaakt van de thermische uitzetting van een geleidende draad.

O.A. 111033, kl. 21e11a. N.V. Philips. Electronenstraaloscillograaf voor het in poolcoördinaten weergeven van een meetsignaal.

O.A. 98172, kl. 95a3a1. N.V. Philips. Zelfoscillerende impulsgenerator met een enkele teruggekoppelde, periodiek geblokkeerde ontladingsbuis, met stabilisatie van de impulsfrequentie.

O.A. 111192, kl. 95b2. N.V. Philips. Inrichting voor het beinvloeden van de eigenfrequentie van een trillingskring met behulp van een reactantie, waarbij een liniair verband tussen de stuurgrootheid en de eigen frequentie verkregen wordt.

O.A. 131592. kl. 95b2. Comp. Industrielle des Téléphones. Frequentiegemoduleerde zender waarbij terugkoppeling van de oscillatorbuis geschiedt over twee wegen die faze-verschuivende netwerken bevatten.

O.A. 130832. kl. 97f17b3. Bell Telephone. Radio-echo-impulsstelsel, waarbij door een veranderende draaggolf onderscheid kan worden gemaakt tussen kleine en grote terugkaatsende voorwerpen.

Openbaar gemaakt 15 Augustus 1950.

O.A. 127505. kl. 21 a^{4}75a. Electrical & Musical Industries. Inrichting ter vermindering van weglekken van hoogfrequente energie door een opening in een afscherming, welke om een bron van hoogfrequente energie is aangebracht en door welke opening een bedieningsas of een voedingsgeleider is gevoerd.

O.A. 129294, kl. 21c47a1. Westinghouse Brake & Signal Comp. Inrichting welke een niet constante wisselspanning transformeert in een nagenoeg constante wisselspanning met behulp van twee transformatoren, waarvan één transformator een verzadigde ijzerkern heeft waarvan de verzadiging kan worden ingesteld.

O.A. 138633, kl. 95f3a. The Decca Record Comp. Radio-ontvanger met autom. sterkteregeling, in het bijzonder voor het ontvangen van navigatiesignalen met ononderbroken golf, die gestoord worden door sterke stoorsignalen.

O.A. 113693. kl. 95i4a. N.V. Philips. Schakeling voor het mengen van ultrahoogfrequente trillingen, waarbij een der te mengen trillingen gelijkfazig en de andere over een lechersysteem in balans aan de ingangselectroden van twee mengelementen wordt toegevoerd.

O.A. 127346, kl. 95h2b. Western Electric Comp. Electrisch resonantiestelsel met een afstembare trilholte, waarvan de uitslingertijd behoorlijk constant blijft over een betrekkelijk breed afstemgebied.

O.A. 130435. kl. 95a5f. N.V. Philips. Verbetering van een schakeling voor het stabiliseren van een oscillator volgens de octrooiaanvrage 105285.

He.

Openbaar gemaakt 15 April 1950.

Geen octrooiaanvragen openbaar gemaakt, die van belang zijn voor deze rubriek.

Openbaar gemaakt 15 Mei 1950.

O.A. 112751, kl. 21 a^{49}i1. Patelhold. Generator voor ultrakorte golven met snelheidsbesturing en fazefocussering en slechts één ringvormige trilholte, waarbij een radiaal, geleidend schot is aangebracht, zodat de gewenste spanningen optreden op de plaatsen van besturing en van energieafgifte.

O.A. 103581, kl. 95f8a. Hazeltine Corp. Inrichting voor ontvangen van gemoduleerde draaggolven met een regelspanning met extreme waarde bij juiste afstemming, waardoor het geruis tussen de te ontvangen kanalen onderdrukt kan worden.

O.A. 124047, kl. 97f17g5. J. F. Novy. Radio-echo-inrichting, waarbij identificatie van één uit een groep voorwerpen mogelijk is.

Openbaar gemaakt 15 Juni 1950.

O.A. 101647. kl. 21a[4]9j. Radio Röhrenfabrik G.m.b.H., Hamburg. Inrichting voor gelijkrichten van trillingen met ultrahoge frequenties met behulp van een verzadigde diode van bijzondere vorm.

O.A. 104677. kl. 21e11a. N.V. Philips. Electronenstraaloscillograaf voor het gelijktijdig op een zelfde tijdschaal waarneembaar maken van twee of meer meetspanningen, waarbij de amplituden van de gelijktijdig opgetekende krommen in grootte verschillen.

O.A. 125515. kl. 95b2. N.V. Philips. Inrichting voor het opwekken van in faze of in frequentie gemoduleerde trillingen met behulp van een condensatormicrofoon met een aantal in een netwerk opgenomen cellen.

O.A. 90895. kl. 95d2b1a. Marconi's Wireless Telegr. Comp. Inrichting voor het uitzenden van een gemoduleerde draaggolf m.b.v. een eindversterker met hoog rendement.

O.A. 119396. kl. 95g3. Patelhold. Transformatorsysteem voor hoogfrepuente stromen, bestaande uit een aantal door opwikkeling verkorte tweedraads leidingen.

O.A. 136891. kl. 95n2a3. Bell Telephone. Antenne met brede-band-karakteristiek.

O.A. 129712. kl. 95n3c. Bell Telephone. Verbetering aan een antenne voor horizontaal gepolariseerde golven van hoge frequentie.

O.A. 130228. kl. 96b2b5. N.V. Philips. Schakeling voor het opwekken van een aantal naast elkaar liggende draaggolven.

He.

Nieuwe leden

Ir J. W. Baurdoux, Sparrenlaan 28, Hilversum.
Ir G. van Reyen, Oude Delft 100, Delft.
Ir A. Verwoerdt, Kornoeljestraat 84, 's Gravenhage.
Ir J. Th. Poley, Groot Hoefijzerlaan 42, Wassenaar.
Ir S. Duinker, Verspronckweg 82, Haarlem.

Voorgestelde leden

C. Rodenburg, Prof. Schoemakerstraat 53, Delft. Techn. Hoofdambtenaar aan de T.H.

Ir H. C. Bennebroek Evertsz', Lindenheuvel 1, Hilversum, werkzaam bij Philips' Telec. Industrie.

Ir E. J. Post, Schiebroekse singel 13, Rotterdam, werkzaam op het Centraal Lab. P.T.T. (Radiolab.).

M. van Sliedregt, de Savornin Lohmanlaan 131, Rotterdam, werkzaam op het Centraal Lab. P.T.T. (Radiolab.).

Eventuele bezwaren tegen toelating als lid moeten binnen 14 dagen aan de secretaris van het N.R.G. worden toegezonden.

Ontvangen Tijdschriften enz.

Journal of the Franklin Institute, Mei, Juni, Juli, Aug. 1950.
Wireless Engineer, Juni, Juli 1950.
Nat. Bureau of Standards, Technical News Bulletin Vol 34, Nrs 4, 5, 6.
Nat. Bureau of Standards, Basic Radio Predictions for Sept., Oct., Nov. 1950.
Annales des Télécommunication, Tome 5, Nrs 5, 6, 7 1950.
U.R.S.I. Bulletin, Mei-Juni 1950.
P.T.T. bedrijf, Mei 1950.
Radio Revue, Juli, Aug., Sept. 1950.
De Ingenieur, Jrg. 61, Nrs 21-37, 1950.
Tijdschrift voor Radio Techniek, Jrg. 4, Nrs 6, 7.

INHOUD

Blz.

Pol, Balth. van der, De straling van „Beam"-antennes in het bijzonder en grote oppervlakken in het algemeen 151

Tellegen, B. D. H. De krachten tussen twee stroomgeleiders 157

Schouten, J. P. Velden in en om holten in een magneticum, hierop werkende ponderomotorische krachten in een magnetisch veld bij electrische stroom in de holte en het bij beweging van de holte optredende electrische veld 163

Jonker, J. L. H. De inwendige weerstand van een penthode 179

Wyck, C. T. F. van der, Cylindervormige uitbreiding van electromagnetische golven in een medium met veranderlijke electrische eigenschappen (Elias-laag) boven een half-geleidende aarde 195

Op den Orth, J. M. Periodieke en niet-periodieke trillingen bij een ongeveer in resonantie met een opgedrukte wisselspanning verkerende trillingskring, bevattende een spoel met ijzerkern 211

Alexander, J. W. Over de versterking van impulsvormig gemoduleerde spanningen en de daarbij optredende hellingsvermindering en tijdsvertraging 237

Giltay, J. Over ferromagnetische toestanden 253

Lange Dzn, H. de, Berekening van de schakeltijd van een multi-vibrator 275

Huynen, J. R. Radar-antenne-systemen over gelijkmatige bestraling van een oppervlak 293

Verslag van het examen radiotechnicus en monteur.

Octrooien

Nieuwe leden

Voorgestelde leden

Ontvangen Tijdschriften enz.